

Os subscritos servem para identificar os problemas análogos. É evidente que os potenciais V_e e V_m , as intensidades de campo elétrico \mathbf{E}_e e \mathbf{E}_m , a condutividade e a permissividade σ e ϵ , e a densidade de corrente e a densidade de fluxo elétrico \mathbf{J} e \mathbf{D} são análogos em pares. Referindo-se a um mapa quadrado-curvilíneo, deveríamos interpretar os tubos de fluxo como tubos de corrente, cada um agora levando uma corrente incremental que não pode deixar o tubo.

Finalmente, devemos olhar para as fronteiras. O que é análogo a uma fronteira condutora na qual termina o fluxo elétrico em direção normal e que é uma superfície equipotencial? A analogia fornece a resposta, e vemos que na superfície deve terminar a densidade de corrente em direção normal e, de novo, ser uma superfície equipotencial. Essa é a superfície de um condutor perfeito, apesar de na prática ser necessário apenas utilizar um cuja condutividade seja muitas vezes a do meio condutor.

Com isso, se desejássemos encontrar o campo dentro de um capacitor coaxial que, conforme vimos diversas vezes anteriormente, é uma porção do campo de uma linha infinita de cargas, deveríamos pegar dois cilindros de cobre e preencher a região entre eles com, por conveniência, uma solução eletrolítica. Aplicando uma diferença de potencial entre os cilindros, podemos utilizar uma ponta de prova para estabelecer o potencial em qualquer ponto intermediário, ou para encontrar todos aqueles pontos que possuem o mesmo potencial. Essa é a essência da cuba ou do tanque eletrolítico. A grande vantagem desse método reside no fato de que ele não é limitado a problemas bidimensionais.

A determinação da capacitância a partir dessas medições é fácil. A corrente total que deixa o condutor mais positivo é

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}$$

onde a integral de superfície fechada é tomada ao longo de toda a superfície do condutor. A diferença de potencial é dada pelo negativo da integral de linha da placa menos positiva para a mais positiva,

$$V_{\sigma 0} = - \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}$$

e a resistência total é, portanto,

$$R = \frac{V_{\sigma 0}}{I} = \frac{- \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}}$$

A capacitância é dada pela razão da carga total pela diferença de potencial,

$$C = \frac{Q}{V_{\sigma 0}} = \frac{\epsilon \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}}{- \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}}$$

Agora invocamos a analogia fazendo $V_{\sigma 0} = V_{\sigma 0}$ e $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_e$. O resultado é

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (45)$$

Conhecendo-se a condutividade do eletrólito e a permissividade do dielétrico, podemos determinar a capacitância por uma simples medição de resistência.

Outro uso óbvio de (45) é calcular rapidamente a resistência de uma dada configuração de dois condutores sabendo sua capacitância, ou vice-versa. Consideraremos isso útil quando determinarmos expressões para os parâmetros de linhas de transmissão, no Capítulo 14. Deve-se notar, entretanto, que (45) pode ser aplicada com segurança apenas para meios lineares, homogêneos e isotrópicos. Especificamente, a permissividade e a condutividade não podem depender da intensidade do campo, posicionamento dentro do meio ou orientação do campo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Fano, R. M., Chu, L. J. e Adler, R. B. *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1960. A polarização em dielétricos é discutida na primeira parte do Capítulo 5. Esse texto pressupõe um curso completo de física em eletricidade e magnetismo e é, portanto, de um nível um pouco mais avançado. A introdução começando na p. 1 deve ser lida.
2. Fink, D. G. e Beaty, H. W. *Standard Handbook for Electrical Engineers*. 12ª. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1987.
3. Matsch, L. W. *Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964. Muitos dos aspectos práticos sobre capacitores são discutidos no Capítulo 2.
4. Ramo, S., Whinnery, J. R. e Van Duzer, T. *Fields and Waves in Communications Electronics*. 3ª ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1994. Esse livro é, essencialmente, a quinta edição dos textos populares de importantes autores de 1944 e 1953. Apesar de ser direcionado principalmente a estudantes que estão iniciando a pós-graduação, a sua leitura pode ser de interesse por qualquer um que esteja familiarizado com conceitos básicos de eletromagnetismo. Materiais dielétricos anisotrópicos são discutidos nas pp. 699-712. Desenhos por quadrados curvilíneos são discutidos nas pp. 50-52.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 6

- 6.1 Hidrogênio atômico contém $5,5 \times 10^{25}$ átomos/m³ em certa temperatura e pressão. Quando um campo dielétrico de 4 kV/m é aplicado, cada dipolo formado pelo elétron e núcleo positivo possui um comprimento efetivo de $7,1 \times 10^{-19}$ m. (a) Calcule P . (b) Calcule ϵ_r .
- 6.2 Calcule a constante dielétrica de um material no qual a densidade de fluxo elétrico seja quatro vezes a polarização.
- 6.3 Um condutor coaxial tem raios $a = 0,8$ mm e $b = 3$ mm, e um dielétrico de poliestireno para o qual $\epsilon_r = 2,56$. Se $\mathbf{P} = (2/\rho)\mathbf{a}_\rho$ nC/m² no dielétrico, calcule: (a) \mathbf{D} e \mathbf{E} como funções de ρ ; (b) V_{ab} e χ_e ; (c) Se existem 4×10^{19} moléculas por metro cúbico no dielétrico, calcule $p(\rho)$.
- 6.4 Considere um material feito de dois elementos que possuem densidades N_1 e N_2 moléculas/m³, respectivamente. Os dois materiais estão uniformemente misturados, levando a uma densidade total $N = N_1 + N_2$. A presença de um campo elétrico \mathbf{E} induz momentos de dipolos moleculares \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 dentro dos elementos individualmente, se misturados ou não. Mostre que a constante dielétrica do material

- composto é dada por $\epsilon_r = f\epsilon_{r1} + (1-f)\epsilon_{r2}$, onde f é a fração numérica dos dipolos do elemento 1 no composto, e onde ϵ_{r1} e ϵ_{r2} são as constantes dielétricas que os elementos não misturados teriam se cada uma tivesse densidade N .
- 6.5 A superfície $x = 0$ separa dois dielétricos perfeitos. Para $x > 0$ seja $\epsilon_r = \epsilon_{r1} = 3$, enquanto $\epsilon_{r2} = 5$ onde $x < 0$. Se $\mathbf{E}_1 = 80\mathbf{a}_x - 60\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$ V/m, calcule: (a) E_{N1} ; (b) E_{T1} ; (c) \mathbf{E}_2 ; (d) o ângulo θ_1 entre \mathbf{E}_1 e uma normal à superfície; (e) D_{N2} ; (f) D_{T2} ; (g) D_{2z} ; (h) \mathbf{P}_2 ; (i) o ângulo θ_2 entre \mathbf{E}_2 e uma normal à superfície.
- 6.6 O campo potencial em uma placa de material dielétrico para o qual $\epsilon_r = 1,6$ é dado como $V = -5000x$. (a) Calcule \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{P} no material. (b) Calcule ρ , ρ_b e ρ_f no material.
- 6.7 Dois dielétricos perfeitos possuem permissividades relativas $\epsilon_{r1} = 2$ e $\epsilon_{r2} = 8$. A superfície plana entre eles é a superfície $x - y + 2z = 5$. A origem situa-se na região 1. Se $\mathbf{E}_1 = 100\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y - 50\mathbf{a}_z$ V/m, calcule \mathbf{E}_2 .
- 6.8 A região 1 ($x \geq 0$) é um dielétrico com $\epsilon_{r1} = 2$, enquanto a região 2 ($x < 0$) tem $\epsilon_{r2} = 5$. Se $\mathbf{E}_1 = 20\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z$ V/m, calcule: (a) \mathbf{D}_2 ; (b) Calcule a densidade de energia em ambas as regiões.
- 6.9 Sejam as superfícies cilíndricas $\rho = 4$ cm e $\rho = 9$ cm, que envolvem dois dielétricos perfeitos em forma de cunha, $\epsilon_{r1} = 2$ para $0 < \phi < \pi/2$ e $\epsilon_{r2} = 5$ para $\pi/2 < \phi < 2\pi$. Se $\mathbf{E}_1 = (2000/\rho)\mathbf{a}_\phi$ V/m, calcule: (a) \mathbf{E}_2 ; (b) a energia eletrostática total armazenada em 1 m de comprimento em cada região.
- 6.10 Seja $S = 100$ mm², $d = 3$ mm e $\epsilon_r = 12$ para um capacitor de placas paralelas. (a) Calcule a capacitância. (b) Após conectar uma bateria de 6 V no capacitor, calcule E , D , Q e a energia eletrostática total armazenada. (c) Com a fonte ainda conectada, o dielétrico é cuidadosamente retirado das placas. Sem dielétrico, recalcule E , D , Q e a energia armazenada no capacitor. (d) Se a carga e a energia encontradas na parte (c) são menores que os respectivos valores encontrados na parte (b) (que você deve ter descoberto), o que foi feito da carga e da energia perdidas?
- 6.11 Os capacitores tendem a ser mais caros à medida que suas capacitâncias e tensões máximas, V_{\max} , aumentam. A tensão V_{\max} é limitada pela intensidade do campo na qual o dielétrico se rompe, E_{BD} . Qual desses dielétricos proporcionará o maior produto CV_{\max} para áreas iguais de placas: (a) ar; $\epsilon_r = 1$, $E_{BD} = 3$ MV/m; (b) titânato de bário; $\epsilon_r = 1200$, $E_{BD} = 3$ MV/m; (c) dióxido de silício; $\epsilon_r = 3,78$, $E_{BD} = 16$ MV/m; (d) polietileno; $\epsilon_r = 2,26$, $E_{BD} = 4,7$ MV/m?
- 6.12 Um capacitor de placas paralelas preenchido com ar, com separação d entre as placas e área A de placa, está conectado a uma bateria que aplica uma tensão V_0 entre as placas. Deixando-se a bateria conectada, as placas são separadas para uma distância de $10d$. Determine por qual fator cada uma das seguintes grandezas muda: (a) V_0 ; (b) C ; (c) E ; (d) D ; (e) Q ; (f) ρ_s ; (g) W_E .
- 6.13 Um capacitor de placas paralelas está preenchido com um dielétrico não uniforme caracterizado por $\epsilon_r = 2 + 2 \times 10^6 x^2$, onde x é a distância em relação a uma placa em metros. Se $S = 0,02$ m² e $d = 1$ mm, calcule C .
- 6.14 Repita o Problema 6.12, assumindo que a bateria é desconectada antes que a separação entre as placas seja aumentada.
- 6.15 Seja $\epsilon_{r1} = 2,5$ para $0 < y < 1$ mm, $\epsilon_{r2} = 4$ para $1 < y < 3$ mm e ϵ_{r3} para $3 < y < 5$ mm (região 3). Superfícies condutoras estão presentes em $y = 0$ e $y = 5$ mm. Calcule a capacitância por metro quadrado de área da superfície se: (a) a região 3 for ar; (b) $\epsilon_{r3} = \epsilon_{r1}$; (c) $\epsilon_{r3} = \epsilon_{r2}$; (d) região 3 for prata.
- 6.16 Um capacitor de placas paralelas é feito utilizando duas placas circulares de raio a , com a placa inferior no plano xy , centrada na origem. A placa superior está posicionada em $z = d$, com seu centro no eixo z . A placa superior está em um potencial V_0 e a placa inferior está aterrada. Um dielétrico tendo permissividade que varia radialmente preenche a região entre as placas. A permissividade é dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho a)$. Calcule: (a) \mathbf{E} ; (b) \mathbf{D} ; (c) Q ; (d) C .
- 6.17 Dois cilindros condutores coaxiais de raios 2 cm e 4 cm possuem um comprimento de 1 m. A região entre os cilindros contém uma camada de dielétrico de $\rho = c$ até $\rho = d$ com $\epsilon_r = 4$. Calcule a capacitância se: (a) $c = 2$ cm, $d = 3$ cm; (b) $d = 4$ cm e o volume do dielétrico é o mesmo que na parte (a).
- 6.18 (a) Se pudessemos especificar um material a ser utilizado como dielétrico em um capacitor coaxial para o qual a permissividade variasse continuamente com o raio, qual variação com ρ deveria ser utilizada de modo que mantivesse um valor uniforme para a intensidade de campo elétrico? (b) Sob as condições da parte (a), como apareceriam os raios interno e externo na expressão da capacitância por unidade de distância?
- 6.19 Duas cascas condutoras esféricas possuem raios $a = 3$ cm e $b = 6$ cm. O interior é um dielétrico perfeito para o qual $\epsilon_r = 8$. (a) Calcule C . (b) Uma porção do dielétrico é agora removida de forma que $\epsilon_r = 1,0$, $0 < \phi < \pi/2$ e $\epsilon_r = 8$, $\pi/2 < \phi < 2\pi$. Calcule C novamente.
- 6.20 Mostre que a capacitância por unidade de comprimento de um cilindro de raio a é zero.
- 6.21 Com relação à Figura 6.9, seja $b = 6$ m, $h = 15$ m e o potencial do condutor 250 V. Tome $\epsilon = \epsilon_0$. Calcule os valores para K_1 , ρ_L , a e C .
- 6.22 Dois condutores de cobre “#16” (1,29 mm de diâmetro) são paralelos com uma separação d entre eixos. Determine d de modo que a capacitância entre fios no ar seja 30 pF/m.
- 6.23 Um condutor de 2 cm de diâmetro está suspenso no ar com seu eixo a 5 cm de um plano condutor. Seja o potencial do cilindro 100 V e o do plano 0 V. Calcule a densidade superficial de carga (a) no cilindro, no ponto mais próximo do plano; (b) no plano, no ponto mais próximo do cilindro.
- 6.24 Para a configuração do condutor do Problema 6.23, determine a capacitância por unidade de comprimento.
- 6.25 Construa um mapa de quadrados curvilíneos para um capacitor coaxial de 3 cm de raio interno e 8 cm de raio externo. Essas dimensões estão adequadas para o desenho. (a) Use o seu esboço para calcular a capacitância por unidade de comprimento assumindo $\epsilon_r = 1$. (b) Calcule um valor exato para a capacitância por unidade de comprimento.

- 6.26 Construa um mapa de quadrados curvilíneos do campo potencial de dois cilindros circulares paralelos, cada um com 2,5 cm de raio, separados de centro a centro por uma distância de 13 cm. Essas dimensões estão razoáveis para o desenho real se a simetria for considerada. Para checar, calcule a capacitância por metro tanto pelo seu desenho quanto pela fórmula exata. Assuma $\epsilon_r = 1$.
- 6.27 Construa um mapa de quadrados curvilíneos do campo potencial entre dois cilindros circulares paralelos, um de 4 cm de raio, dentro de outro de 8 cm de raio. Os dois eixos estão separados por 2,5 cm. Essas dimensões estão adequadas para o desenho. Para checar, calcule a capacitância por metro, tanto pelo seu desenho quanto pela fórmula exata.

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}[(a^2 + b^2 - D^2)/(2ab)]}$$

onde a e b são os raios dos condutores e D é a separação dos eixos.

- 6.28 Um cilindro condutor sólido de 4 cm de raio está centrado dentro de um cilindro condutor retangular de seção reta de 12 cm por 20 cm. (a) Faça um esboço em tamanho real de um quadrante dessa configuração e construa um mapa de quadrados curvilíneos para seu interior. (b) Assuma $\epsilon = \epsilon_0$ e estime C por unidade de comprimento.

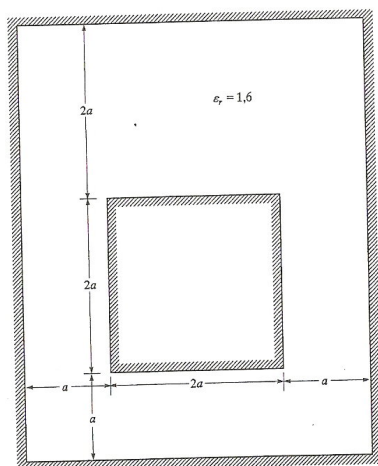


Figura 6.14 Veja o Problema 6.29.

- 6.29 O condutor interno da linha de transmissão mostrado na Figura 6.14 possui uma seção reta quadrada de $2a \times 2a$, enquanto o quadrado externo é $4a \times 5a$. Os eixos estão deslocados, conforme mostrado. (a) Construa um desenho de bom tamanho dessa linha de transmissão, digamos com $a = 2,5$ cm, e depois prepare um esboço de quadrados curvilíneos do campo eletrostático entre os condutores. (b) Use o mapa para calcular a capacitância por metro de comprimento se $\epsilon = 1,6\epsilon_0$. (c) Como seu resultado para a parte (b) mudaria se $a = 0,6$ cm?
- 6.30 Para o capacitor coaxial do Problema 6.18, suponha que o dielétrico está degradado, permitindo que a corrente circule entre os condutores interno e externo, enquanto o campo elétrico ainda é uniforme com o raio. (a) Qual a forma da função que deve assumir a condutividade do dielétrico? (b) Qual a forma básica da função da resistência por unidade de distância, R ? (c) Quais parâmetros permanecem no produto RC , onde a forma de C , a capacitância por unidade de distância, foi determinada no Problema 6.18?
- 6.31 Uma linha de transmissão a dois fios consiste em dois cilindros condutores perfeitos paralelos, cada um com um raio de 0,2 mm, separados de centro a centro de uma distância de 2 mm. O meio que envolve os fios tem $\epsilon_r = 3$ e $\sigma = 1,5$ mS/m. Uma bateria de 100 V é conectada entre os fios. Calcule: (a) a magnitude da carga por metro de comprimento em cada fio; (b) a corrente da bateria.

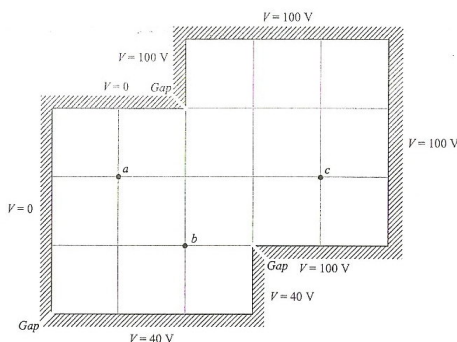


Figura 7.12 Veja o Problema E7.6.

E7.6. Na Figura 7.12, uma grade quadrada é mostrada dentro de uma cuba de potencial irregular. Utilizando o método iterativo para encontrar o potencial até a unidade de volt mais próxima, determine os valores finais em: (a) ponto a; (b) ponto b; (c) ponto c.

Resp. 18 V; 46 V; 91 V

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Dekker, A. J. Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 5.
2. Hayt, W. H., Jr. e Kemmerly, J. E. *Engineering Circuit Analysis*. 5ª ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1993.
3. Push, E. M. e Pugh, E. W. *Principles of Electricity and Magnetism*. 2ª ed. Reading Mass.: Addison-Wesley, 1970. Esse texto proporciona a visão dos físicos de eletricidade e magnetismo, mas estudantes de Engenharia Elétrica devem considerá-lo fácil de ler. A solução para a equação de Laplace por certo número de métodos é discutida no Capítulo 4.
4. Ramo, S., J. R. Whinnery, e Van Duzer, T. (Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 6). Uma discussão mais completa e avançada dos métodos de solução da equação de Laplace é dada no Capítulo 7.
5. Seeley, S. e Poularikas, A. D. *Electromagnetics: Classical and Modern Theory and Applications*. Nova Iorque: Marcel Dekker, 1979. Vários exemplos da solução da equação de Laplace por separação de variáveis aparecem no Capítulo 4.
6. Smythe, W. R. *Static and Dynamic Electricity*. 3ª ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1968. Um tratamento avançado da teoria de potencial é dada no Capítulo 4.
7. Weber, E. Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 6. Existe um grande número de soluções para o potencial dadas com as referências originais.
8. Scarborough, J. B. *Numerical Mathematical Analysis*. 6ª ed. Baltimore, Md.: The John Hopkins Press, 1966. Descreve métodos iterativos de relaxamento e dá vários exemplos completos. Erros inerentes são discutidos.
9. Mitra, Raj. *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. (Topics in Applied Physics, vol. 3), Nova Iorque: Springer-Verlag, 1975.
10. Sadiku, M. N. O. *Numerical Techniques in Electromagnetics*. 2ª ed. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2000.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 7

- 7.1 Seja $V = 2xy^2z^3$ e $\epsilon = \epsilon_0$. Dado o ponto $P(1, 2, -1)$, calcule: (a) V em P ; (b) \mathbf{E} em P ; (c) ρ_v em P ; (d) a equação da superfície eqüipotencial que passa por P ; (e) a equação da linha de força que passa por P . (f) V satisfaz à equação de Laplace?
- 7.2 Dado o campo potencial esférico simétrico no espaço livre $V = V_0 e^{-r/a}$, calcule: (a) ρ_v em $r = a$; (b) o campo elétrico em $r = a$; (c) a carga total.
- 7.3 Seja $V(x, y) = 4e^{2x} + f(x) - 3y^2$ na região do espaço livre onde $\rho_v = 0$. É sabido que E_x e V são zero na origem. Encontre $f(x)$ e $V(x, y)$.
- 7.4 Dado o campo potencial $V(\rho, \phi) = (V_0 \rho/d) \cos \phi$: (a) mostre que $V(\rho, \phi)$ satisfaz à equação de Laplace. (b) Descreva as superfícies de potencial constante. (c) Descreva especificamente as superfícies onde $V = V_0$ e $V = 0$. (d) Escreva a expressão para o potencial em coordenadas cartesianas.
- 7.5 Dado o campo potencial $V = (A\rho^4 + B\rho^{-4}) \sin 4\phi$: (a) mostre que $\nabla^2 V = 0$; (b) seleccione A e B , de modo que $V = 100$ V e $|\mathbf{E}| = 500$ V/m em $P(\rho=1, \phi = 22,5^\circ, z = 2)$.
- 7.6 Um capacitor de placas paralelas tem placas posicionadas em $z = 0$ e $z = d$. A região entre as placas é preenchida com um material que contém carga volumétrica de densidade uniforme ρ_0 C/m³ e tem permissividade ϵ . Ambas as placas são mantidas no potencial de terra. (a) Determine o campo potencial entre as placas. (b) Determine a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} entre as placas. (c) Repita as partes (a) e (b) para o caso de o potencial da placa em $z = d$ ser aumentado para V_0 , com a placa em $z = 0$ aterrada.
- 7.7 Seja $V = (\cos 2\phi)/\rho$ no espaço livre. (a) Calcule a densidade volumétrica de carga no ponto $A(0,5, 60^\circ, 1)$. (b) Encontre a densidade superficial de carga na superfície de um condutor que passa pelo ponto $B(2, 30^\circ, 1)$.
- 7.8 Uma carga volumétrica uniforme tem densidade constante $\rho_v = \rho_0$ C/m³ e preenche a região $r < a$, na qual a permissividade ϵ é assumida. Uma casca condutora esférica está posicionada em $r = a$ e possui um potencial de terra. Calcule: (a) o potencial em todos os pontos; (b) a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} em todos os pontos.
- 7.9 As funções $V_1(\rho, \phi, z)$ e $V_2(\rho, \phi, z)$ satisfazem à equação de Laplace na região $a < \rho < b$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-L < z < L$. Cada uma vale zero nas superfícies

$\rho = b$ para $-L < z < L$; $z = -L$ para $a < \rho < b$ e $z = L$ para $a < \rho < b$. E cada uma vale 100 V na superfície $\rho = a$ para $-L < z < L$. (a) Na região especificada, a equação de Laplace é satisfeita pelas funções $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $V_1 + 3$ e $V_1 V_2$? (b) Na fronteira de superfície especificada, os valores de potencial dados neste problema são obtidos das funções $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $V_1 + 3$ e $V_1 V_2$? (c) As funções $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $V_1 + 3$ e $V_1 V_2$ são idênticas a V_1 ?

- 7.10 Considere o capacitor de placas paralelas do Problema 7.6, mas desta vez o dielétrico carregado existe apenas entre $z = 0$ e $z = b$, onde $b < d$. Espaço livre preenche a região $b < z < d$. Ambas as placas estão no potencial de terra. Resolvendo as equações de Laplace e de Poisson, calcule: (a) $V(z)$ para $0 < z < d$; (b) a intensidade de campo elétrico para $0 < z < d$. Nenhuma carga superficial existe em $z = b$, então V e \mathbf{D} são contínuos no plano $z = b$.
- 7.11 Os planos condutores $2x + 3y = 12$ e $2x + 3y = 18$ estão nos potenciais 100 V e 0, respectivamente. Seja $\epsilon = \epsilon_0$ e calcule: (a) V em $P(5, 2, 6)$; (b) \mathbf{E} em P .
- 7.12 A derivação das equações de Laplace e de Poisson assume permissividade constante, mas existem casos de variação espacial da permissividade nas quais as equações ainda se aplicam. Considere a identidade vetorial $\nabla \cdot (\psi \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{G}$, onde ψ e \mathbf{G} são funções escalar e vetorial, respectivamente. Determine uma regra geral nas direções permitidas, nas quais ϵ pode variar com relação ao campo elétrico local.
- 7.13 Cilindros condutores coaxiais estão posicionados em $\rho = 0,5$ cm e $\rho = 1,2$ cm. A região entre os cilindros é preenchida com um dielétrico perfeito homogêneo. Se o cilindro interno está em 100 V e o externo a 0 V, calcule: (a) a localização da superfície de 20 V; (b) $E_{\rho, \max}$; (c) ϵ , se a carga por metro de comprimento no cilindro interno vale 20 nC/m.
- 7.14 Repita o Problema 7.13, mas com o dielétrico preenchendo apenas parte do volume, dentro de $0 < \phi < \pi$, e com espaço livre no volume restante.
- 7.15 Os dois condutores planos ilustrados na Figura 7.13 são definidos por $0,001 < \rho < 0,120$ m, $0 < z < 0,1$ m, $\phi = 0,179$ e $0,188$ rad. O meio que circunda os planos é o ar. Para a região 1, $0,179 < \phi < 0,188$, despreze a existência de irregularidades nos campos e calcule: (a) $V(\phi)$; (b) $\mathbf{E}(\rho)$; (c) $\mathbf{D}(\rho)$; (d) ρ_s na superfície superior do plano inferior; (e) Q na superfície superior do plano inferior. (f) Repita as partes de (a) e (c) para a Região 2, fazendo a localização do plano superior ser $\phi = 0,188 - 2\pi$, e então encontre ρ_s e Q na superfície inferior do plano inferior. (g) Calcule a carga total no plano inferior e a capacitância entre os planos.
- 7.16 Um capacitor de placas paralelas é construído usando duas placas circulares de raio a , com a placa inferior no plano xy , centrada na origem. A placa superior está posicionada em $z = d$, com seu centro no eixo z . O potencial V_0 está na placa superior. A placa inferior está aterrada. Um dielétrico que possui permissividade

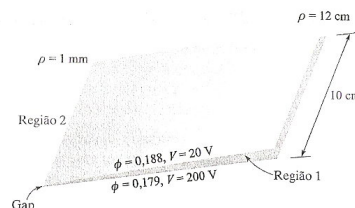


Figura 7.13 Veja o Problema 7.15.

radialmente dependente preenche a região entre as placas. A permissividade é dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho/a)$. Calcule: (a) $V(z)$; (b) \mathbf{E} ; (c) Q ; (d) C . Essa é uma reprise do Problema 6.16, mas começa com a equação de Laplace.

- 7.17 Esferas condutoras concêntricas estão posicionadas em $r = 5$ mm e $r = 20$ mm. A região entre as esferas está preenchida com um dielétrico perfeito. Se a esfera interna está em 100 V e a esfera externa está a 0 V: (a) Encontre a localização da superfície equipotencial de 20 V. (b) Encontre $E_{r, \max}$. (c) Encontre ϵ_r se a densidade superficial de carga na esfera interna é $1,0 \mu\text{C}/\text{m}^2$.
- 7.18 O hemisfério $0 < r < a$, $0 < \theta < \pi/2$ é composto de material condutor homogêneo de condutividade σ . O lado plano do hemisfério apóia-se em um plano perfeitamente condutor. Agora, o material dentro da região cônica $0 < \theta < \alpha$, $0 < r < a$ é retirado e substituído por um material que é perfeitamente condutor. Um gap de ar é mantido entre a ponta $r = 0$ desse novo material e o plano. Qual é a resistência medida entre os dois condutores perfeitos? Despreze a existência de irregularidades no campo.
- 7.19 Dois cones condutores possuem seus vértices na origem e eixos coincidentes com o eixo z . O cone A tem o ponto $A(1, 0, 2)$ na sua superfície, enquanto o cone B tem o ponto $B(0, 3, 2)$ na sua superfície. Seja $V_A = 100$ V e $V_B = 20$ V. Calcule: (a) α para cada cone; (b) V em $P(1, 1, 1)$.
- 7.20 Um campo potencial no espaço livre é dado como $V = 100 \ln \tan(\theta/2) + 50$ V. (a) Calcule o máximo valor de $|\mathbf{E}_\theta|$ na superfície $\theta = 40^\circ$ para $0,1 < r < 0,8$ m, $60^\circ < \phi < 90^\circ$. (b) Descreva a superfície $V = 80$ V.
- 7.21 No espaço livre, seja $\rho_v = 200\epsilon_0/r^{2,4}$. (a) Use a equação de Poisson para encontrar $V(r)$ se for assumido que $r^2 E_r \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, e também que $V \rightarrow 0$, à medida que $r \rightarrow \infty$. (b) Agora encontre $V(r)$, usando a lei de Gauss e uma integral de linha.
- 7.22 Com uma solução apropriada para as equações de Laplace e de Poisson, determine o potencial absoluto no centro de uma esfera de raio a , que contém uma carga

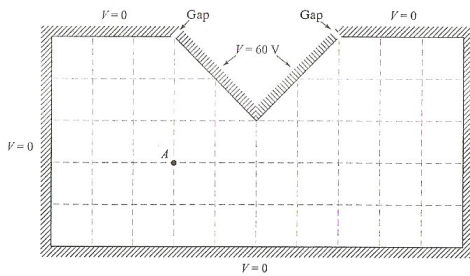


Figura 7.16 Veja o Problema 7.32.

em termos de V_1 , V_2 , V_3 e V_4 e das distâncias desiguais h_1 , h_2 , h_3 e h_4 . (a) Mostre que

$$V_0 = \frac{V_1}{\left(1 + \frac{h_1}{h_3}\right)\left(1 + \frac{h_1 h_3}{h_4 h_2}\right)} + \frac{V_2}{\left(1 + \frac{h_2}{h_4}\right)\left(1 + \frac{h_2 h_4}{h_1 h_3}\right)} + \frac{V_3}{\left(1 + \frac{h_3}{h_1}\right)\left(1 + \frac{h_1 h_3}{h_4 h_2}\right)} + \frac{V_4}{\left(1 + \frac{h_4}{h_2}\right)\left(1 + \frac{h_2 h_4}{h_1 h_3}\right)}$$

(b) Determine V_0 na Figura 7.17b.

- 7.34 Considere a configuração de condutores e potenciais mostrada na Figura 7.18. Utilizando o método descrito no Problema 7.33, estime os potenciais nos pontos x , y e z .

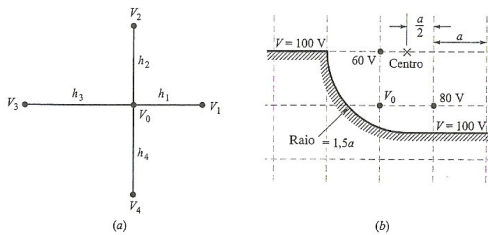


Figura 7.17 Veja o Problema 7.33.

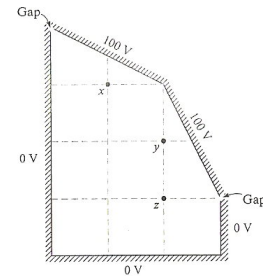


Figura 7.18 Veja o Problema 7.34.

- 7.35 (a) Após estimar os potenciais para a configuração da Figura 7.19, use o método iterativo com uma grade quadrada de 1 cm de lado para encontrar estimativas melhores nos sete pontos da grade. Trabalhe com resolução de 1 volt. (b) Construa uma grade de 0,5 cm, estabeleça novas estimativas preliminares, e então use o método iterativo na grade de 0,5 cm. Novamente, trabalhe com resolução de 1 volt. (c) Use um computador para obter valores para uma grade de 0,25 cm. Trabalhe com resolução de 0,1 V.

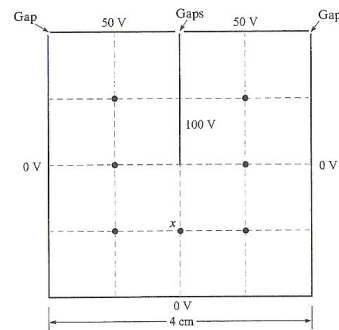


Figura 7.19 Veja o Problema 7.35.

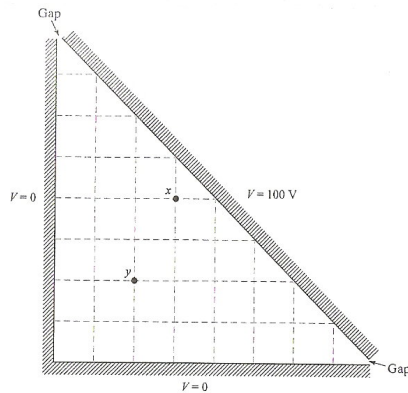


Figura 7.14 Veja o Problema 7.30.

volumétrica uniforme de densidade ρ_0 . Assuma permissividade ϵ_0 em todos os pontos. Dica: O que deve ser verdadeiro com relação ao potencial e ao campo elétrico em $r = 0$ e em $r = a$?

- 7.23 Uma cuba retangular é formada por quatro planos condutores posicionados em $x = 0$ e 8 cm e $y = 0$ e 5 cm no ar. A superfície em $y = 5$ cm está em um potencial de 100 V, as outras três estão no potencial zero, e os gaps necessários foram colocados nos dois vértices. Calcule o potencial em $x = 3$ cm, $y = 4$ cm.
- 7.24 Os quatro lados de uma cuba quadrada são mantidos nos potenciais de $0, 20, -30$, e 60 V. Os potenciais mais alto e mais baixo estão em lados opostos. Calcule o potencial no centro da cuba.
- 7.25 Na Figura 7.7, mude o lado direito de modo que o potencial varie linearmente de 0 na parte de baixo daquele lado até 100 V na parte de cima. Solucione o problema, encontrando o potencial no centro da cuba.
- 7.26 Se X é uma função de x e $X'' + (x - 1)X - 2X = 0$, assuma uma solução na forma de uma série infinita de potências e determine valores numéricos para a_2 até a_8 se $a_0 = 1$ e $a_1 = -1$.
- 7.27 Sabe-se que $V = XY$ é uma solução da equação de Laplace, onde X é uma função de x apenas e Y é uma função de y apenas. Determine quais das seguintes funções potenciais também são soluções da equação de Laplace: (a) $V = 100 X$; (b) $V = 50$

XY ; (c) $V = 2XY + x - 3y$; (d) $V = xXY$; (e) $V = X^2Y$.

- 7.28 Assuma uma solução produto para a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, $V = PF$, onde V não é uma função de z , P é uma função de ρ apenas, e F é uma função de ϕ apenas. (a) Obtenha as duas equações separadas, se a constante de separação é n^2 . (b) Mostre que $P = A\rho^n + B\rho^{-n}$ satisfaz à equação ρ . (c) Construa uma solução $V(\rho, \phi)$. Funções dessa forma são chamadas de *harmônicos circulares*.
- 7.29 Referindo-se ao Capítulo 6, Figura 6.14, considere que o condutor interno da linha de transmissão esteja em um potencial de 100 V, enquanto o externo está no potencial zero. Construa uma grade de $0,5a$ de lado, e use a iteração para encontrar V em um ponto que está a unidades acima do vértice superior direito do condutor interno. Encontre o resultado com 1 volt de resolução.
- 7.30 Use o método iterativo para estimar os potenciais nos pontos x e y na cuba triangular da Figura 7.14. Encontre o resultado com 1 volt de resolução.
- 7.31 Use o método iterativo para estimar os potenciais nos pontos x da cuba mostrada na Figura 7.15. Encontre o resultado com 1 volt de resolução.
- 7.32 Usando a grade da Figura 7.16, estime o potencial do ponto A com um volt de resolução.
- 7.33 Condutores que possuem fronteiras curvadas ou assimétricas usualmente não permitem que todos os pontos da grade coincidam com a fronteira verdadeira. A Figura 7.17a ilustra essa situação, no qual o potencial em V_0 tem que ser estimado

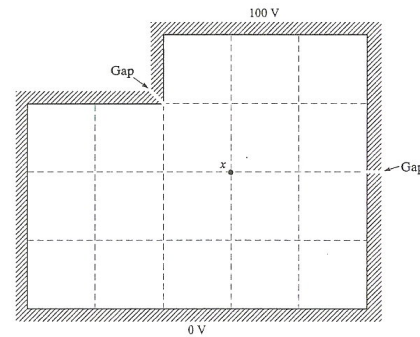


Figura 7.15 Veja o Problema 7.31.

- 8.33 Utilize uma expansão em coordenadas cartesianas para mostrar que o rotacional de gradiente de qualquer campo escalar G é igual a zero.
- 8.34 Por um condutor filamental no eixo z circula uma corrente de 16 A na direção \mathbf{a}_z , por uma casca condutora em $\rho = 6$ circula uma corrente total de 12 A na direção $-\mathbf{a}_z$, e por outra casca em $\rho = 10$ circula uma corrente total de 4 A na direção $-\mathbf{a}_z$. (a) Calcule \mathbf{H} para $0 < \rho < 12$. (b) Faça o gráfico de H_ϕ versus ρ . (c) Calcule o fluxo total Φ que atravessa a superfície $1 < \rho < 7, 0 < z < 1$.
- 8.35 Uma lâmina de corrente, $\mathbf{K} = 20 \mathbf{a}_z$ A/m, está posicionada em $\rho = 2$, e uma segunda lâmina, $\mathbf{K} = -10 \mathbf{a}_z$ A/m, está posicionada em $\rho = 4$. (a) Seja $V_m = 0$ em $P(\rho = 3, \phi = 0, z = 5)$ e posicione uma barreira em $\phi = \pi$. Calcule $V_m(\rho, \phi, z)$ para $-\pi < \phi < \pi$. (b) Seja $\mathbf{A} = 0$ em P e calcule $\mathbf{A}(\rho, \phi, z)$ para $2 < \rho < 4$.
- 8.36 Seja $\mathbf{A} = (3y - z)\mathbf{a}_x + 2xz\mathbf{a}_y$ Wb/m em uma certa região do espaço livre. (a) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (b) Em $P(2, -1, 3)$ calcule $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ e \mathbf{J} .
- 8.37 Seja $N = 1000, I = 0,8$ A, $\rho_0 = 2$ cm e $a = 0,8$ cm para o toróide mostrado na Figura 8.12b. Calcule V_m no interior do toróide se $V_m = 0$ em $\rho = 2,5$ cm, $\phi = 0,3\pi$. Mantenha ϕ dentro da faixa $0 < \phi < 2\pi$.
- 8.38 Considere que uma corrente contínua de I ampères está circulando na direção \mathbf{a}_z pelo filamento que se estende entre $-L < z < L$ no eixo z . (a) Utilizando coordenadas cilíndricas, calcule \mathbf{A} em um ponto genérico $P(\rho, 0^\circ, z)$. Dica: use a forma \sinh^{-1} para o cálculo da integral. (b) A partir da parte (a) calcule \mathbf{B} e \mathbf{H} . (c) Faça $L \rightarrow \infty$ e mostre que a expressão para \mathbf{H} se reduz à forma conhecida para um filamento infinito.
- 8.39 Lâminas de corrente planas de $\mathbf{K} = 30 \mathbf{a}_z$ A/m e $-30 \mathbf{a}_z$ A/m estão posicionadas no espaço livre em $x = 0,2$ e $x = -0,2$, respectivamente. Para a região $-0,2 < x < 0,2$: (a) calcule \mathbf{H} ; (b) obtenha uma expressão para V_m se $V_m = 0$ em $P(0,1,0,2,0,3)$; (c) calcule \mathbf{B} ; (d) obtenha uma expressão para \mathbf{A} se $\mathbf{A} = 0$ em P .
- 8.40 Mostre que a integral de linha do potencial vetor \mathbf{A} ao longo de qualquer caminho fechado é igual ao fluxo magnético envolvido pelo caminho, ou $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.
- 8.41 Assuma que $\mathbf{A} = 50\rho^2 \mathbf{a}_z$ Wb/m em certa região do espaço livre. (a) Calcule \mathbf{H} e \mathbf{B} . (b) Calcule \mathbf{J} . (c) Use \mathbf{J} para encontrar a corrente total que atravessa a superfície $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = 0$. (d) Use os valores de H_ϕ em $\rho = 1$ para calcular $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ para $\rho = 1, z = 0$.
- 8.42 Mostre que $\nabla_2(1/R_{12}) = -\nabla_1(1/R_{12}) = \mathbf{R}_{21}/R_{12}^3$.
- 8.43 Calcule o potencial vetor magnético dentro do condutor externo para a linha coaxial cujo potencial vetor magnético é mostrado na Figura 8.20, se o raio externo do condutor externo vale $7a$. Selecione o zero de referência adequado e esboce esses resultados na figura.
- 8.44 Expandindo a Equação (58) da Seção 8.7 em coordenadas cartesianas, mostre que (59) está correta.

Forças Magnéticas, Materiais e Indutância

Não foi dado muito significado físico às grandezas de campo magnético $\mathbf{H}, \mathbf{B}, \Phi, V_m$ e \mathbf{A} introduzidas no Capítulo 8. Cada uma dessas grandezas é simplesmente definida em termos da distribuição espacial das fontes de corrente. Se a distribuição de corrente for conhecida, percebemos que \mathbf{H}, \mathbf{B} e \mathbf{A} são determinados em cada ponto do espaço, apesar de talvez não sermos capazes de calcular as integrais que as definem por causa da complexidade matemática.

Estamos agora prontos para desenvolver a segunda metade do problema dos campos magnéticos, aquela associada à determinação de forças e torques exercidos pelo campo magnético em outras cargas. O campo elétrico produz uma força que é exercida numa carga que pode estar em repouso ou em movimento. Vamos ver que o campo magnético estacionário é capaz de exercer uma força apenas em uma carga que estiver em movimento. Esse resultado parece razoável. Um campo magnético pode ser produzido por cargas em movimento e pode exercer forças em cargas em movimento. Um campo magnético não pode ser produzido por cargas estacionárias e não pode exercer nenhuma força numa carga estacionária.

Esse capítulo inicialmente considera as forças e torques em condutores de corrente os quais podem ser de natureza filamental ou possuir uma seção reta finita com uma distribuição de corrente conhecida. Os problemas associados à movimentação de partículas no vácuo são evitados ao máximo.

Com um entendimento dos efeitos fundamentais produzidos pelo campo magnético, consideraremos então os variados tipos de materiais magnéticos, a análise de circuitos magnéticos elementares, as forças nos materiais magnéticos e, finalmente, os importantes conceitos, em circuitos elétricos, de indutância própria e indutância mútua. ■

Com o objetivo de relacionar C_1 com as fontes no nosso problema, temos de tomar o rotacional de \mathbf{A}

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi = -\frac{C_1}{\rho} \mathbf{a}_\phi = \mathbf{B}$$

obter \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = -\frac{C_1}{\mu_0 \rho} \mathbf{a}_\phi$$

e calcular a integral de linha

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_0^{2\pi} -\frac{C_1}{\mu_0 \rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi = -\frac{2\pi C_1}{\mu_0}$$

Logo

$$C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

ou

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho} \quad (66)$$

e

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

como antes. Um gráfico de A_z versus ρ para $b = 5a$ é mostrado na Figura 8.20. A diminuição de $|\mathbf{A}|$ com a distância a partir da fonte de corrente concentrada representada pelo condutor interno é evidente. Os resultados do Exercício E8.9 também foram adicionados à Figura 8.20. A extensão da curva para dentro do condutor externo é deixado para o Problema 8.43.

Também é possível encontrar A_z entre os condutores aplicando-se um processo que alguns de nós informalmente chama de "irrotacional". Isto é, conhecemos \mathbf{H} ou \mathbf{B} para o

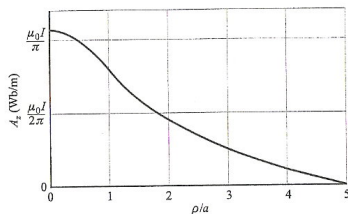


Figura 8.20 O potencial vetor magnético é mostrado dentro do condutor interno e na região entre condutores para um cabo coaxial com $b = 5a$, no qual circula uma corrente I na direção \mathbf{a}_z . $A_z = 0$ é arbitrariamente selecionado em $\rho = b$.

cabo coaxial, podemos selecionar a componente em ϕ de $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e integrar para obter A_z . Tente fazê-lo, você vai gostar!

E8.10. A Equação (66) é obviamente também aplicável ao exterior de qualquer condutor de seção reta circular pelo qual passe uma corrente I na direção \mathbf{a}_z , no espaço livre. O zero de referência é arbitrariamente escolhido em $\rho = b$. Considere agora dois condutores, cada um com 1 cm de raio, paralelos ao eixo z e com seus eixos pertencentes ao plano $x = 0$. Um dos condutores, cujo raio está em $(0, 4 \text{ cm}, z)$, possui uma corrente de 12 A na direção \mathbf{a}_z . O outro eixo está em $(0, -4 \text{ cm}, z)$ e possui uma corrente de 12 A na direção $-\mathbf{a}_z$. Cada corrente possui seu zero de referência para \mathbf{A} posicionado a 4 cm de seu eixo. Calcule o campo \mathbf{A} total em: (a) $(0, 0, z)$; (b) $(0, 8 \text{ cm}, z)$; (c) $(4 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, z)$; (d) $(2 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, z)$.

Resp. 0; $2,64 \mu\text{Wb/m}$; $1,93 \mu\text{Wb/m}$; $3,40 \mu\text{Wb/m}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Boast, W. B. (Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 2.) O potencial escalar magnético é definido na p. 220, e seu uso no mapeamento de campos magnéticos é discutido na p. 444.
2. Jordan, E. C. e Balmain, K. G. *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*. 2ª ed. Englewood Cliffs, Nova Jersey: Prentice-Hall, 1968. O potencial vetor magnético é discutido nas pp. 90-96.
3. Paul, C. R., Whites, K. W. e Nasar, S. Y. *Introduction to Electromagnetic Fields*. 3ª ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1998. O potencial vetor magnético é apresentado nas pp. 216-220.
4. Skilling, H. H. (Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 3.) A "roda propulsora de navio a vapor" é introduzida nas pp. 23-25.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 8

- 8.1 (a) Calcule \mathbf{H} em componentes cartesianas em $P(2, 3, 4)$, se existe um filamento de corrente no eixo z no qual circulam 8 mA na direção \mathbf{a}_z . (b) Repita se o filamento está posicionado em $x = -1, y = 2$. (c) Calcule \mathbf{H} se ambos os filamentos estão presentes.
- 8.2 Um condutor filamentar onde circula uma corrente I tem a forma de um triângulo equilátero com lados de comprimento l . Calcule a intensidade de campo magnético no centro do triângulo.
- 8.3 Dois filamentos semi-infinitos no eixo z posicionam-se nas regiões $-\infty < z < -a$ e $a < z < \infty$. Em cada um circula uma corrente I na direção \mathbf{a}_z . (a) Calcule \mathbf{H} como uma função de ρ e ϕ em $z = 0$. (b) Qual valor de a resultará em uma intensidade de \mathbf{H} em $\rho = 1, z = 0$, igual à metade do valor obtido para um filamento infinito?
- 8.4 (a) Um filamento tem formato de um círculo de raio a , centrado na origem no plano $z = 0$. Por ele circula uma corrente I na direção \mathbf{a}_ϕ . Calcule \mathbf{H} na origem. (b) Um segundo filamento tem a forma de um quadrado no plano $z = 0$. Os lados são para-

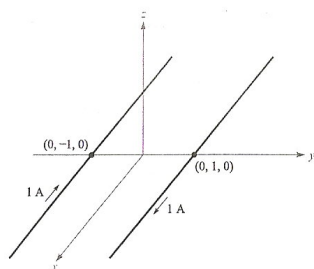


Figura 8.21 Veja o Problema 8.5.

- lelos aos eixos coordenados e uma corrente I circula na direção genérica \mathbf{a}_ϕ . Determine o comprimento b dos lados (em termos de a), de tal forma que \mathbf{H} na origem tenha a mesma intensidade daquela causada pelo *loop* circular da parte (a).
- 8.5 Os condutores filamentos paralelos mostrados na Figura 8.21 estão no espaço livre. Desenhe o gráfico de $|\mathbf{H}|$ versus y , $-4 < y < 4$, ao longo da linha $x = 0, z = 2$.
- 8.6 Um disco de raio a pertence ao plano xy , com o eixo z passando pelo seu centro. Uma carga superficial de densidade uniforme ρ_s está presente no disco, que gira em volta do eixo z , a uma velocidade angular de Ω rad/s. Calcule \mathbf{H} em todos os pontos no eixo z .
- 8.7 Dados os pontos $C(5, -2, 3)$ e $P(4, -1, 2)$, um elemento de corrente $I d\mathbf{L} = 10^{-4}(4, -3, 1) \text{ A} \cdot \text{m}$ em C produz um campo $d\mathbf{H}$ em P . (a) Especifique a direção de $d\mathbf{H}$ por um vetor unitário \mathbf{a}_H . (b) Calcule $|d\mathbf{H}|$. (c) Que direção \mathbf{a}_L deve $I d\mathbf{L}$ ter, em C , de modo que $d\mathbf{H} = 0$?
- 8.8 Para o elemento de corrente de comprimento finito no eixo z , conforme mostra a Figura 8.5, use a lei de Biot-Savart para derivar a Equação (9) da Seção 8.1.
- 8.9 Uma lâmina de corrente $\mathbf{K} = 8\mathbf{a}_x \text{ A/m}$ circula na direção $-2 < y < 2$ no plano $z = 0$. Calcule \mathbf{H} em $P(0, 0, 3)$.
- 8.10 Uma casca condutora esférica oca de raio a tem conexões filamentosas feitas no topo ($r = a, \theta = 0$) e na base ($r = a, \theta = \pi$). Uma corrente contínua I circula para baixo pelo filamento superior, pela superfície esférica, e sai pelo filamento inferior. Calcule \mathbf{H} em coordenadas esféricas (a) dentro e (b) fora da esfera.
- 8.11 Por um filamento infinito no eixo z circulam 20 mA na direção \mathbf{a}_z . Três lâminas de corrente cilíndricas uniformes também estão presentes: 400 mA/m em $\rho = 1 \text{ cm}$, -250 mA/m em $\rho = 2 \text{ cm}$ e -300 mA/m em $\rho = 3 \text{ cm}$. Calcule H_ϕ em $\rho = 0,5, 1,5, 2,5$ e $3,5 \text{ cm}$.

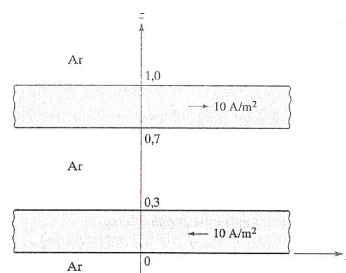


Figura 8.22 Veja o Problema 8.12.

- 8.12 Na Figura 8.22, sejam as regiões $0 < z < 0,3 \text{ m}$ e $0,7 < z < 1,0 \text{ m}$ placas condutoras nas quais circulam densidades uniformes de corrente de 10 A/m^2 em direções opostas, conforme está mostrado. Calcule \mathbf{H} em $z =$: (a) $-0,2$; (b) $0,2$; (c) $0,4$; (d) $0,75$; (e) $1,2 \text{ m}$.
- 8.13 Por uma casca cilíndrica oca de raio a centrada no eixo z circula uma densidade superficial uniforme de corrente de $K_s \mathbf{a}_\phi$. (a) Mostre que H não é uma função de ϕ ou z . (b) Mostre que H_ϕ e H_ρ valem zero em todos os pontos. (c) Mostre que $H_z = 0$ para $\rho > a$. (d) Mostre que $H_z = K_s$ para $\rho < a$. (e) Por uma segunda casca, $\rho = b$, circula uma corrente $K_s \mathbf{a}_\phi$. Calcule \mathbf{H} em todos os pontos.
- 8.14 Um toróide que possui seção reta de formato retangular é definido pelas seguintes superfícies: os cilindros $\rho = 2$ e $\rho = 3 \text{ cm}$ e os planos $z = 1$ e $z = 2,5 \text{ cm}$. Pelo toróide passa uma densidade superficial de corrente de $-50\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$ na superfície $\rho = 3 \text{ cm}$. Calcule \mathbf{H} no ponto $P(\rho, \phi, z)$: (a) $P_A(1,5 \text{ cm}, 0, 2 \text{ cm})$; (b) $P_B(2,1 \text{ cm}, 0, 2 \text{ cm})$; (c) $P_C(2,7 \text{ cm}, \pi/2, 2 \text{ cm})$; (d) $P_D(3,5 \text{ cm}, \pi/2, 2 \text{ cm})$.
- 8.15 Assuma que exista uma região com simetria cilíndrica na qual a condutividade é dada por $\sigma = 1,5e^{-150\rho} \text{ kS/m}$. Um campo elétrico de $30\mathbf{a}_z \text{ V/m}$ está presente. (a) Calcule \mathbf{J} . (b) Calcule a corrente total que atravessa a superfície $\rho < \rho_0, z = 0$, todo ϕ . (c) Use a lei circuital de Ampère para calcular \mathbf{H} .
- 8.16 Um cabo coaxial balanceado contém três condutores coaxiais de resistência desprezível. Assuma um condutor interno sólido de raio a , um condutor intermediário de raio interno b_i e raio externo b_o , e um condutor externo com raios interno e externo iguais a c_i e c_o , respectivamente. Pelo condutor intermediário passa uma corrente I no sentido positivo de \mathbf{a}_z e está no potencial V_0 . Os condutores interno e externo estão ambos no potencial zero, e por cada um deles circula uma corrente $I/2$ no sentido negativo de \mathbf{a}_z . Assumindo que a distribuição de corrente em cada

- condutor é uniforme, calcule: (a) \mathbf{J} em cada condutor; (b) \mathbf{H} em todos os pontos; (c) \mathbf{E} em todos os pontos.
- 8.17 Por um filamento de corrente no eixo z circula uma corrente de 7 mA na direção \mathbf{a}_z , e lâminas de corrente de $0,5 \mathbf{a}_x$ A/m e $-0,2 \mathbf{a}_x$ A/m estão posicionadas em $\rho = 1$ cm e $\rho = 0,5$ cm, respectivamente. Calcule \mathbf{H} em: (a) $\rho = 0,5$ cm; (b) $\rho = 1,5$ cm; (c) $\rho = 4$ cm. (d) Qual é o valor da lâmina de corrente que deveria estar posicionada em $\rho = 4$ cm de forma que $\mathbf{H} = 0$ para todo $\rho > 4$ cm?
- 8.18 Um fio de 3 mm de raio é constituído de um material interno ($0 < \rho < 2$ mm) para o qual $\sigma = 10^7$ S/m, e de um material externo ($2 \text{ mm} < \rho < 3$ mm) para o qual $\sigma = 4 \times 10^7$ S/m. Se pelo fio passa uma corrente contínua total de 100 mA, determine \mathbf{H} em todos os pontos como uma função de ρ .
- 8.19 Calcule $\nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{G})]$ se $\mathbf{G} = 2x^2yz \mathbf{a}_x - 20y \mathbf{a}_y + (x^2 - z^2) \mathbf{a}_z$.
- 8.20 Um condutor sólido de seção reta com raio de 5 mm tem uma condutividade que varia com o raio. O condutor tem 20 metros de comprimento e existe uma diferença de potencial contínua de 0,1 V entre suas duas extremidades. Dentro desse condutor, $\mathbf{H} = 10^6 \rho^2 \mathbf{a}_z$ A/m. (a) Calcule σ como uma função de ρ . (b) Qual é o valor da resistência entre as duas extremidades?
- 8.21 Os pontos A, B, C, D, E e F estão cada um a 2 mm da origem nos eixos coordenados indicados na Figura 8.23. O valor de \mathbf{H} em cada ponto é dado. Calcule um valor aproximado para $\nabla \times \mathbf{H}$ na origem.
- 8.22 Um cilindro sólido de raio a e comprimento L , onde $L \gg a$ contém carga volumétrica de densidade uniforme ρ_0 C/m³. O cilindro gira em torno de seu eixo (o eixo z) com velocidade angular de Ω rad/s. (a) Determine a densidade de corrente \mathbf{J} como uma função da posição dentro do cilindro girante. (b) Determine \mathbf{H} no eixo, aplicando os resultados do Problema 8.6. (c) Determine a intensidade de campo magnético \mathbf{H} dentro e fora. (d) Verifique seu resultado da parte (c) tomando o rotacional de \mathbf{H} .
- 8.23 Dado o campo $\mathbf{H} = 20\rho^2 \mathbf{a}_\phi$ A/m: (a) Determine a densidade de corrente \mathbf{J} . (b) Integre \mathbf{J} sobre a superfície circular $\rho = 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $z = 0$, para determinar

Ponto	\mathbf{H} (A/m)
A	$11,34\mathbf{a}_x - 13,78\mathbf{a}_y + 14,21\mathbf{a}_z$
B	$10,68\mathbf{a}_x - 12,19\mathbf{a}_y + 15,82\mathbf{a}_z$
C	$10,49\mathbf{a}_x - 12,19\mathbf{a}_y + 15,69\mathbf{a}_z$
D	$11,49\mathbf{a}_x - 13,78\mathbf{a}_y + 14,35\mathbf{a}_z$
E	$11,11\mathbf{a}_x - 13,88\mathbf{a}_y + 15,10\mathbf{a}_z$
F	$10,88\mathbf{a}_x - 13,10\mathbf{a}_y + 14,90\mathbf{a}_z$

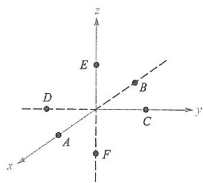


Figura 8.23 Veja o Problema 8.21.

a corrente total que passa pela superfície na direção \mathbf{a}_z . (c) Calcule a corrente total novamente, desta vez por uma integral de linha em volta do caminho circular $\rho = 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $z = 0$.

- 8.24 Calcule ambos os lados do teorema de Stokes para o campo $\mathbf{G} = 10 \sin \theta \mathbf{a}_\phi$ e a superfície $r = 3$, $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, $0 \leq \phi \leq 90^\circ$. Considere que a superfície tenha direção \mathbf{a}_r .
- 8.25 Quando x , y e z são positivos e menores que 5, uma certa intensidade de campo magnético pode ser expressa como $\mathbf{H} = [x^2yz/(y+1)]\mathbf{a}_x + 3x^2z^2\mathbf{a}_y - [xyz^2/(y+1)]\mathbf{a}_z$. Calcule a corrente total na direção \mathbf{a}_z que atravessa a faixa $x = 2$, $1 \leq y \leq 4$, $3 \leq z \leq 4$, por um método que utilize: (a) uma integral de superfície; (b) uma integral de linha fechada.
- 8.26 Seja $\mathbf{G} = 15r\mathbf{a}_\phi$. (a) Determine $\oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ para o caminho circular $r = 5$, $\theta = 25^\circ$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. (b) Calcule $\int_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S}$ pela calota esférica $r = 5$, $0 \leq \theta \leq 25^\circ$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.
- 8.27 A intensidade de campo magnético é dada em uma certa região do espaço como $\mathbf{H} = [x + 2y/z^2]\mathbf{a}_x + (2/z)\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ A/m. (a) Calcule $\nabla \times \mathbf{H}$. (b) Calcule \mathbf{J} . (c) Use \mathbf{J} para encontrar a corrente total que passa pela superfície $z = 4$, $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq z \leq 5$, na direção \mathbf{a}_z . (d) Mostre que o mesmo resultado é encontrado utilizando o outro lado do teorema de Stokes.
- 8.28 Dado $\mathbf{H} = (3r^2/\sin \theta)\mathbf{a}_\phi + 54r \cos \theta \mathbf{a}_r$ A/m no espaço livre: (a) Calcule a corrente total na direção \mathbf{a}_ϕ que atravessa a superfície cônica $\theta = 20^\circ$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 5$, por qualquer um dos lados do teorema de Stokes que você mais goste. (b) Cheque o resultado utilizando o outro lado do teorema de Stokes.
- 8.29 Por um condutor longo, reto e não magnético de 0,2 mm de raio circula uma corrente contínua uniformemente distribuída de 2 A. (a) Calcule \mathbf{J} dentro do condutor. (b) Use a lei circuital de Ampère para encontrar \mathbf{H} e \mathbf{B} dentro do condutor. (c) Mostre que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ dentro do condutor. (d) Calcule \mathbf{H} e \mathbf{B} fora do condutor. (e) Mostre que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ fora do condutor.
- 8.30 (O inverso do Problema 8.20.) Um condutor sólido e não-magnético de seção reta circular tem um raio de 2 mm. O condutor não é homogêneo, com $\sigma = 10^6(1 + 10^6\rho^2)$ S/m. Se o condutor tem 1 m de comprimento e apresenta uma tensão de 1 mV entre suas extremidades, calcule: (a) \mathbf{H} dentro; (b) o fluxo magnético total dentro do condutor.
- 8.31 A casca cilíndrica definida por $1 \text{ cm} < \rho < 1,4 \text{ cm}$ consiste de um material condutor não magnético e por ela passa uma corrente total de 50 A na direção \mathbf{a}_z . Calcule o fluxo magnético total que atravessa o plano $\phi = 0$, $0 < z < 1$: (a) $0 < \rho < 1,2 \text{ cm}$; (b) $1,0 \text{ cm} < \rho < 1,4 \text{ cm}$; (c) $1,4 \text{ cm} < \rho < 20 \text{ cm}$.
- 8.32 A região de espaço livre definida por $1 < z < 4 \text{ cm}$ e $2 < \rho < 3 \text{ cm}$ é um toróide de seção reta circular. Seja a superfície em $\rho = 3$ pela qual circula uma corrente superficial $\mathbf{K} = 2\mathbf{a}_z$ kA/m. (a) Especifique as densidades de corrente nas superfícies em $\rho = 2 \text{ cm}$, $z = 1 \text{ cm}$ e $z = 4 \text{ cm}$. (b) Calcule \mathbf{H} em todos os pontos. (c) Calcule o fluxo total dentro do toróide.

Logo, para esse campo uniforme

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

$$M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2$$

Similarmente,

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_2 I_2 \pi R_1^2$$

$$M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 = M_{12}$$

Se $n_1 = 50$ espiras/cm, $n_2 = 80$ espiras/cm, $R_1 = 2$ cm e $R_2 = 3$ cm, então

$$M_{12} = M_{21} = 4\pi \times 10^{-7} (5000)(8000)\pi (0,02^2) = 63,2 \text{ mH/m}$$

As indutâncias próprias são facilmente encontradas. O fluxo produzido na bobina 1 por I_1 é

$$\Phi_{11} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

e com isso,

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 S_1 d \quad H$$

A indutância por unidade de comprimento é então

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 S_1 \quad H/m$$

ou

$$L_1 = 39,5 \quad \text{mH/m}$$

De forma similar,

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 S_2 = 22,7 \quad \text{mH/m}$$

Vemos, desta forma, que existem muito métodos disponíveis para o cálculo da indutância própria e da indutância mútua. Infelizmente, até problemas que possuem um alto grau de simetria apresentam integrais muito desafiadoras para cálculo, e apenas alguns problemas estão disponíveis para que treinemos nossa habilidade.

A indutância será discutida em termos de circuitos no Capítulo 11.

E9.12. Calcule a indutância própria de: (a) 3,5 m de cabo coaxial com $a = 0,8$ mm e $b = 4$ mm, preenchido com material para o qual $\mu_r = 50$; (b) uma bobina toroidal de 500 espiras, enrolada em uma forma de fibra de vidro que possui seção reta quadrada de $2,5 \times 2,5$ cm e um raio interno de 2 cm; (c) um solenóide que possui 500 espiras em torno de um núcleo cilíndrico de 2 cm de raio no qual $\mu_r = 50$ para $0 < \rho < 0,5$ cm e $\mu_r = 1$ para $0,5 < \rho < 2$ cm. O comprimento do solenóide é de 50 cm.

Resp. 56,3 μH ; 1,01 mH; 3,2 mH

E9.13. Um solenóide tem 50 cm de comprimento, 2 cm de diâmetro e contém 1500 espiras. O núcleo cilíndrico tem um diâmetro de 2 cm e uma permeabilidade relativa de 75. Essa bobina é coaxial com um segundo solenóide, também de 50 cm de comprimento, mas com um diâmetro de 3 cm e 1200 espiras. Calcule: (a) L para o solenóide interno; (b) L para o solenóide externo; (c) M entre os dois solenóides.

Resp. 133,2 mH; 86,7 mH; 106,6 mH

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Krauss, J. D. e Fleish, D. A. (Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 3). Exemplos de cálculo de indutância são dados nas p. 99-108.
2. Matsch, L. W. (Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 6). O Capítulo 3 é dedicado a circuitos magnéticos e materiais ferromagnéticos.
3. Paul, C. R., Whites, K. W. e Nasar, S. Y. (Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 8). Circuitos magnéticos, incluindo aqueles com ímãs permanentes, são discutidos nas p. 263-70.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 9

- 9.1 Uma carga pontual, $Q = -0,3 \mu\text{C}$ e $m = 3 \times 10^{-16}$ kg, está se movendo pelo campo $\mathbf{E} = 30\mathbf{a}_z$ V/m. Use a Equação (1) e as leis de Newton para desenvolver as equações diferenciais apropriadas e resolvê-as, sujeitas às condições iniciais em $t = 0$, $\mathbf{v} = 3 \times 10^4 \mathbf{a}_x$ m/s na origem. Em $t = 3 \mu\text{s}$, calcule: (a) a posição $P(x, y, z)$ da carga; (b) a velocidade \mathbf{v} ; (c) a energia cinética da carga.
- 9.2 Uma carga pontual, $Q = -0,3 \mu\text{C}$ e $m = 3 \times 10^{-16}$ kg, está se movendo pelo campo $\mathbf{B} = 30\mathbf{a}_z$ mT. Use a Equação (2) e as leis de Newton para desenvolver as equações diferenciais apropriadas e resolvê-as, sujeitas às condições iniciais em $t = 0$, $\mathbf{v} = 3 \times 10^4 \mathbf{a}_x$ m/s na origem. Resolva essas equações (talvez com a ajuda do exemplo dado na Seção 7.5) para calcular em $t = 3 \mu\text{s}$: (a) a posição $P(x, y, z)$ da carga; (b) sua velocidade; (c) e sua energia cinética.
- 9.3 Uma carga pontual para a qual $Q = 2 \times 10^{-16}$ C e $m = 5 \times 10^{-26}$ kg está se movendo pelos campos combinados $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_x - 200\mathbf{a}_y + 300\mathbf{a}_z$ V/m e $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ mT. Se a velocidade da carga em $t = 0$ é $\mathbf{v}(0) = (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z)10^5$ m/s: (a) calcule o vetor unitário que mostra a direção na qual a carga está acelerando em $t = 0$; (b) encontre a energia cinética da carga em $t = 0$.
- 9.4 Mostre que uma partícula carregada em um campo magnético uniforme descreve uma órbita circular com um período orbital que é independente do raio. Encontre a relação entre a velocidade angular e a densidade de fluxo magnético para um elétron (a frequência ciclotron).

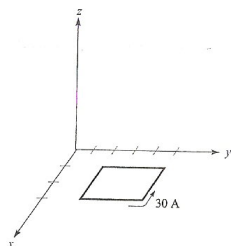


Figura 9.15 Veja o Problema 9.6.

- 9.5 Uma espira retangular de fio condutor no espaço livre une os pontos $A(1, 0, 1)$ a $B(3, 0, 1)$ a $C(3, 0, 4)$ a $D(1, 0, 4)$ a A . Pelo fio circula uma corrente de 6 mA na direção \mathbf{a}_z de B para C . Uma corrente filamental de 15 A circula ao longo de todo o eixo z na direção \mathbf{a}_z . (a) Calcule \mathbf{F} no lado BC . (b) Calcule \mathbf{F} no lado AB . (c) Calcule F_{total} na espira.
- 9.6 A densidade de fluxo magnético numa região do espaço livre é dado como $\mathbf{B} = -3x\mathbf{a}_x + 5y\mathbf{a}_y - 2z\mathbf{a}_z$ T. Calcule a força total na espira retangular mostrada na Figura 9.15 se ela se situa no plano $z = 0$ e é limitada por $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$ e $y = 5$, sendo todas as dimensões em cm.
- 9.7 Lâminas de corrente uniformes estão posicionadas no espaço livre conforme se segue: $8\mathbf{a}_z$ A/m em $y = 0$, $-4\mathbf{a}_z$ A/m em $y = 1$ e $-4\mathbf{a}_z$ A/m em $y = -1$. Encontre o vetor força por metro de comprimento exercida em um filamento de corrente pelo qual circulam 7 mA na direção \mathbf{a}_z se o filamento está posicionado em: (a) $x = 0$, $y = 0,5$ e $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_z$; (b) $y = 0,5$, $z = 0$ e $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_x$; (c) $x = 0$, $y = 1,5$ e $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_z$.
- 9.8 Correntes filamentosas de $-25\mathbf{a}_z$ e $25\mathbf{a}_z$ A estão posicionadas no plano $x = 0$ no espaço livre em $y = -1$ e $y = 1$ m, respectivamente. Uma terceira corrente filamental de $10^{-3}\mathbf{a}_z$ A está posicionada em $x = k$, $y = 0$. Encontre o vetor força em 1 m de comprimento do filamento de 1 mA e desenhe o gráfico de $|\mathbf{F}|$ versus k .
- 9.9 Uma corrente de $-100\mathbf{a}_z$ A/m circula no cilindro condutor $\rho = 5$ mm, e $+500\mathbf{a}_z$ A/m está presente no cilindro condutor $\rho = 1$ mm. Calcule a intensidade da força total por metro de comprimento que está agindo para dividir o cilindro externo ao longo de seu comprimento.
- 9.10 Uma linha de transmissão plana consiste de dois planos condutores de largura b separados de d m no ar, pelos quais circulam correntes iguais e opostas de I A. Se $b \gg d$, encontre a força de repulsão por metro de comprimento entre os dois condutores.
- 9.11 (a) Use a Equação (14), da Seção 9.3, para mostrar que a força de atração por unidade de comprimento entre dois condutores filamentosos no espaço livre com

correntes $I_1\mathbf{a}_z$ em $x = 0$, $y = d/2$ e $I_2\mathbf{a}_z$ em $x = 0$, $y = -d/2$, é $\mu_0 I_1 I_2 / (2\pi d)$. (b) Mostre como um método mais simples pode ser utilizado para verificar seu resultado.

- 9.12 Por uma fita condutora de corrente, que se posiciona no plano $x = 0$ entre $y = 0,5$ e $y = 1,5$ m, circulam $\mathbf{K} = 12\mathbf{a}_z$ A/m. Existe também um filamento de corrente de $I = 5$ A na direção \mathbf{a}_z do eixo z . Encontre a força exercida em: (a) o filamento pela fita de corrente; (b) a fita pelo filamento.
- 9.13 Uma corrente de 6 A circula de $M(2, 0, 5)$ a $N(5, 0, 5)$ por um condutor retilíneo e sólido posicionado no espaço livre. Um filamento infinito de corrente situa-se ao longo do eixo z e é percorrido por 50 A na direção \mathbf{a}_z . Calcule o vetor torque segmento de fio usando a origem em: (a) $(0, 0, 5)$; (b) $(0, 0, 0)$; (c) $(3, 0, 0)$.
- 9.14 A espira retangular do Problema 9.6 é agora submetida ao campo \mathbf{B} produzido por duas lâminas de corrente; $\mathbf{K}_1 = 400\mathbf{a}_y$ A/m em $z = 2$ e $\mathbf{K}_2 = 300\mathbf{a}_y$ A/m em $y = 0$, no espaço livre. Calcule o vetor torque na espira, referido a uma origem (a) em $(0, 0, 0)$; (b) no centro da espira.
- 9.15 Um filamento condutor sólido se estende de $x = -b$ até $x = b$ ao longo da linha $y = 2$, $z = 0$. Esse filamento é percorrido por uma corrente de 3 A na direção \mathbf{a}_x . Por um filamento infinito no eixo z circulam 5 A na direção \mathbf{a}_z . Obtenha uma expressão para o torque exercido no condutor finito em relação à origem posicionada em $(0, 2, 0)$.
- 9.16 Assuma que um elétron está descrevendo uma órbita circular de raio a em volta de um núcleo carregado positivamente. (a) Selecionando uma corrente e uma área apropriadas, mostre que o momento de dipolo orbital equivalente é $ea^2\omega/2$, onde ω é a velocidade angular do elétron. (b) Mostre que o torque produzido por um campo magnético paralelo ao plano de órbita é $ea^2\omega B/2$. (c) Igualando as forças de Coulomb e centrífuga, mostre que ω vale $(4\pi e_0 m_e a^3 / e^2)^{-1/2}$, onde m_e é a massa do elétron. (d) Encontre valores para a velocidade angular, torque e para o momento magnético orbital para o átomo de hidrogênio, onde a é aproximadamente 6×10^{-11} m. Considere $B = 0,5$ T.
- 9.17 O átomo de hidrogênio descrito no Problema 9.16 é agora submetido a um campo magnético que tem a mesma direção daquele do átomo. Mostre que as forças causadas por \mathbf{B} resultam na diminuição da velocidade angular de $eB/(2m_e)$ e uma diminuição no momento orbital de $e^2 a^2 B / (4m_e)$. Quanto valem essas diminuições para o átomo de hidrogênio em partes por milhão para uma densidade de fluxo magnético externo de 0,5 T?
- 9.18 Calcule o vetor torque na espira quadrada mostrada na Figura 9.16 em relação à origem em A no campo \mathbf{B} , dados: (a) $A(0, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = 100\mathbf{a}_y$ mT; (b) $A(0, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y$ mT; (c) $A(1, 2, 3)$ e $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y - 300\mathbf{a}_z$ mT; (d) $A(1, 2, 3)$ e $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y - 300\mathbf{a}_z$ mT para $x \geq 2$ e $\mathbf{B} = 0$ nos outros pontos.
- 9.19 Dado o material para o qual $\chi_m = 3,1$ e dentro do qual $\mathbf{B} = 0,4y\mathbf{a}_z$ T, calcule: (a) \mathbf{H} ; (b) μ ; (c) μ_r ; (d) \mathbf{M} ; (e) \mathbf{J} ; (f) \mathbf{J}_b ; (g) \mathbf{J}_f .
- 9.20 Calcule \mathbf{H} em um material onde (a) $\mu_r = 4,2$, existem $2,7 \times 10^{29}$ átomos/m³ e cada átomo tem um momento de dipolo de $2,6 \times 10^{-30} \mathbf{a}_y$ A · m²; (b) $\mathbf{M} = 270\mathbf{a}_z$ A/m e $\mu = 2\mu_0$ H/m; (c) $\chi_m = 0,7$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_z$ T. (d) Calcule \mathbf{M} em um material onde existem

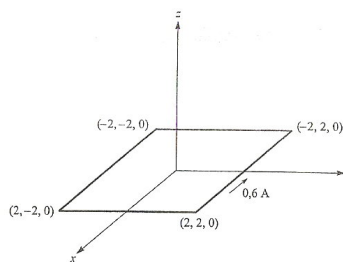


Figura 9.16 Veja o Problema 9.18.

densidades superficiais de corrente ligada de $12 \mathbf{a}_z$ A/m e $-9 \mathbf{a}_z$ A/m em $\rho = 0,3$ e $0,4$ m, respectivamente.

- 9.21 Encontre a intensidade da magnetização em um material para o qual: (a) a densidade de fluxo magnético é $0,02$ Wb/m²; (b) a intensidade de campo magnético é 1200 A/m e a permeabilidade relativa é $1,005$; (c) existem $7,2 \times 10^{28}$ átomos por metro cúbico, cada um possuindo um momento de dipolo de 4×10^{-30} A·m² na mesma direção, e a susceptibilidade magnética vale $0,003$.
- 9.22 Sob certas condições é possível aproximar os efeitos de materiais ferromagnéticos assumindo linearidade na relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} . Seja $\mu_r = 1000$ para um certo material do qual um fio cilíndrico de raio 1 mm é feito. Se $I = 1$ A e a distribuição de corrente é uniforme, calcule (a) \mathbf{B} ; (b) \mathbf{H} ; (c) \mathbf{M} ; (d) \mathbf{J} e (e) \mathbf{J}_b dentro do fio.
- 9.23 Calcule valores para H_ϕ , B_ϕ e M_ϕ em $\rho = c$ para um cabo coaxial com $a = 2,5$ mm e $b = 6$ mm se pelo mesmo circula uma corrente $I = 12$ A no condutor central, e $\mu = 3$ μH/m para $2,5$ mm $< \rho < 3,5$ mm, $\mu = 5$ μH/m para $3,5$ mm $< \rho < 4,5$ mm, e $\mu = 10$ μH/m para $4,5$ mm $< \rho < 6$ mm. Use $c =$: (a) 3 mm; (b) 4 mm; (c) 5 mm.
- 9.24 Uma linha de transmissão coaxial tem $a = 5$ mm e $b = 20$ mm. Considere que seu centro esteja no eixo z e que uma corrente contínua I circule na direção \mathbf{a}_z no centro do condutor. O volume entre os condutores contém um material magnético para o qual $\mu_r = 2,5$, assim como ar. Calcule \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{M} em todos os pontos entre os condutores se $H_\phi = \frac{600}{\pi}$ A/m em $\rho = 10$ mm, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e o material magnético está posicionado em; (a) $a < \rho < 3a$; (b) $0 < \rho < \pi$.
- 9.25 Por um filamento condutor em $z = 0$ circula uma corrente de 12 A na direção \mathbf{a}_z . Seja $\mu_r = 1$ para $\rho < 1$ cm, $\mu_r = 6$ para $1 < \rho < 2$ cm, e $\mu_r = 1$ para $\rho > 2$ cm. Calcule: (a) \mathbf{H} em todos os pontos; (b) \mathbf{B} em todos os pontos.

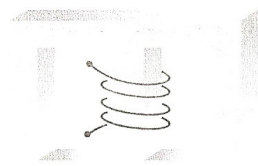


Figura 9.17 Veja o Problema 9.28.

- 9.26 Duas lâminas de corrente, $K_1 \mathbf{a}_y$ A/m em $z = 0$ e $-K_2 \mathbf{a}_y$ A/m em $z = d$, estão separadas por duas tiras de material magnético, μ_{r1} para $0 < z < a$, e μ_{r2} para $a < z < d$. Se $\mu_{r2} = 3\mu_{r1}$, calcule a razão a/d tal que 10% do fluxo magnético total esteja na região $0 < z < a$.
- 9.27 Seja $\mu_{r1} = 2$ na região 1, definida por $2x + 3y - 4z > 1$, enquanto $\mu_{r2} = 5$ na região 2 onde $2x + 3y - 4z < 1$. Na região 1, $\mathbf{H}_1 = 50\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$ A/m. Calcule: (a) \mathbf{H}_{N1} ; (b) \mathbf{H}_{t1} ; (c) \mathbf{H}_{N2} ; (d) \mathbf{H}_{t2} ; (e) θ_1 , o ângulo entre \mathbf{H}_1 e \mathbf{a}_{N21} ; (f) θ_2 , o ângulo entre \mathbf{H}_2 e \mathbf{a}_{N21} .
- 9.28 Para valores de B abaixo do joelho da curva de magnetização para o aço-silício, aproxime a curva por uma linha reta com $\mu = 5$ mH/m. O núcleo mostrado na Figura 9.17 possui áreas de $1,6$ cm² e comprimentos de 10 cm em cada perna externa, e uma área de $2,5$ cm² e comprimento de 3 cm na perna central. Uma bobina de 1200 espiras pela qual circulam 12 mA é enrolada na perna central. Calcule B na: (a) perna central; (b) perna central se um gap de ar de $0,3$ mm está presente nessa perna.
- 9.29 No Problema 9.28, a aproximação linear sugerida no enunciado do problema leva a uma densidade de fluxo de $0,666$ T na perna central. Utilizando esse valor de B e a curva de magnetização para o aço-silício, qual corrente é necessária na bobina de 1200 espiras?
- 9.30 Um núcleo toroidal tem uma área da seção reta circular de 4 cm². O raio médio do toróide é de 6 cm. O núcleo é composto de dois segmentos semicirculares: um de aço silício e o outro de um material linear com $\mu_r = 200$. Existe um gap de ar de $0,4$ mm em cada uma das duas junções, e o núcleo é envolvido por uma bobina de 4000 espiras por onde circula uma corrente I_1 . (a) Calcule I_1 se a densidade de fluxo no núcleo é $1,2$ T. (b) Calcule a densidade de fluxo no núcleo se $I_1 = -0,3$ A.
- 9.31 Um toróide é construído de um material magnético e possui área da seção reta de $2,5$ cm² e um comprimento efetivo de 8 cm. Existe também um pequeno gap de ar de $0,25$ mm de comprimento e uma área efetiva de $2,8$ cm². Uma fmm de 200 A·e é aplicada ao circuito magnético. Calcule o fluxo total no toróide se o material magnético: (a) é considerado como tendo uma permeabilidade infinita; (b) é considerado como sendo linear com $\mu_r = 1000$; (c) é de aço silício.

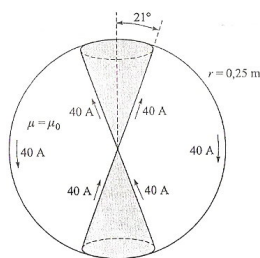


Figura 9.18 Veja o Problema 9.35.

- 9.32 Determine a energia total na região esférica de 1 cm de raio, centrada na origem no espaço livre, no campo uniforme: (a) $\mathbf{H}_1 = -600\mathbf{a}_x$ A/m; (b) $\mathbf{H}_2 = 600\mathbf{a}_x + 1200\mathbf{a}_y$ A/m; (c) $\mathbf{H}_3 = -600\mathbf{a}_x + 1200\mathbf{a}_y$ A/m; (d) $\mathbf{H}_4 = \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3$; (e) $1000\mathbf{a}_x$ A/m + $0,001\mathbf{a}_y$ T.
- 9.33 Um núcleo toroidal tem uma seção reta quadrada, $2,5 \text{ cm} < \rho < 3,5 \text{ cm}$, $-0,5 \text{ cm} < z < 0,5 \text{ cm}$. A metade superior do toróide, $0 < z < 0,5 \text{ cm}$ é construída de um material linear para o qual $\mu_r = 10$, enquanto a metade inferior, $-0,5 \text{ cm} < z < 0$, tem $\mu_r = 20$. Uma fmm de $150 \text{ A} \cdot \text{e}$ estabelece um fluxo da direção \mathbf{a}_ϕ . Para $z > 0$, calcule: (a) $H_\phi(\rho)$; (b) $B_\phi(\rho)$; (c) $\Phi_{z>0}$; (d) Repita para $z < 0$. (e) Calcule Φ_{total} .
- 9.34 Determine a energia armazenada por unidade de comprimento no campo magnético interno de um fio retilíneo infinitamente longo de raio a , pelo qual circula uma corrente I .
- 9.35 Os cones $\theta = 21^\circ$ e $\theta = 159^\circ$ são superfícies condutoras e neles circulam correntes totais de 40 A , conforme mostra a Figura 9.18. As correntes retornam por uma superfície esférica condutora de raio $0,25 \text{ m}$. (a) Calcule \mathbf{H} na região $0 < r < 0,25$, $21^\circ < \theta < 159^\circ$, $0 < \phi < 2\pi$. (b) Quanta energia está armazenada nessa região?
- 9.36 As dimensões do condutor externo de um cabo coaxial são b e c , onde $c > b$. Assumindo $\mu = \mu_0$, calcule a energia magnética armazenada por unidade de comprimento na região $b < \rho < c$ para uma corrente total I uniformemente distribuída que circula em sentidos opostos nos condutores interno e externo.
- 9.37 Calcule a indutância da configuração cone-esfera descrita no Problema 9.35 e na Figura 9.18. A indutância é aquela oferecida na origem entre os vértices do cone.
- 9.38 Um núcleo toroidal tem uma seção reta retangular definida pelas superfícies $\rho = 2 \text{ cm}$, $\rho = 3 \text{ cm}$, $z = 4 \text{ cm}$ e $z = 4,5 \text{ cm}$. O material do núcleo possui uma permeabilidade relativa de 80. Se o núcleo é enrolado por uma bobina contendo 8000 espiras de fio, calcule a indutância.
- 9.39 Por planos condutores no ar em $z = 0$ e $z = d$ circulam correntes de $\pm K_0\mathbf{a}_x$ A/m. (a) Calcule a energia armazenada no campo magnético por unidade de comprimento ($0 < x < 1$) em uma largura w ($0 < y < w$). (b) Calcule a indutância por

unidade de comprimento dessa linha de transmissão por $W_H = \frac{1}{2}LI^2$, onde I é a corrente total em uma largura w em cada condutor. (c) Calcule o fluxo total que passa pelo retângulo $0 < x < 1$, $0 < z < d$, no plano $y = 0$, e deste resultado novamente encontre a indutância por unidade de comprimento.

- 9.40 Um cabo coaxial tem um condutor de dimensões de 1 mm e 5 mm. A região entre os condutores é ar para $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$, e um material não condutor que possui $\mu_r = 8$ para $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$. Calcule a indutância por unidade de comprimento.
- 9.41 Uma bobina retangular é composta de 150 espiras de um condutor filamento. Calcule a indutância mútua no espaço livre entre essa bobina e um filamento retilíneo infinito no eixo z se os quatro vértices da bobina estão posicionados em: (a) $(0, 1, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 3, 1)$ e $(0, 1, 1)$; (b) $(1, 1, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(1, 3, 1)$ e $(1, 1, 1)$.
- 9.42 Ache a indutância mútua entre dois filamentos que formam anéis circulares de raios a e Δa , onde $\Delta a \ll a$. O campo deve ser determinado por métodos aproximados. Os anéis são coplanares e concêntricos.
- 9.43 (a) Use as relações de energia para mostrar que a indutância interna de um fio cilíndrico não magnético de raio a em que circula uma corrente I uniformemente distribuída é $\mu_0(8\pi) \text{ H/m}$. (b) Calcule a indutância interna se a porção do condutor para o qual $\rho < c < a$ for removida.

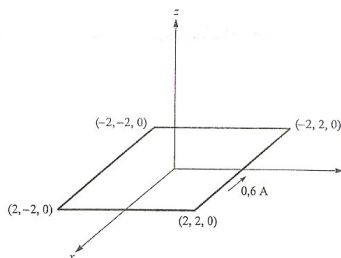


Figura 9.16 Veja o Problema 9.18.

densidades superficiais de corrente ligada de $12 \text{ a}_x \text{ A/m}$ e $-9 \text{ a}_x \text{ A/m}$ em $\rho = 0,3$ e $0,4 \text{ m}$, respectivamente.

- 9.21 Encontre a intensidade da magnetização em um material para o qual: (a) a densidade de fluxo magnético é $0,02 \text{ Wb/m}^2$; (b) a intensidade de campo magnético é 1200 A/m e a permeabilidade relativa é $1,005$; (c) existem $7,2 \times 10^{28}$ átomos por metro cúbico, cada um possuindo um momento de dipolo de $4 \times 10^{-30} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ na mesma direção, e a susceptibilidade magnética vale $0,003$.
- 9.22 Sob certas condições é possível aproximar os efeitos de materiais ferromagnéticos assumindo linearidade na relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} . Seja $\mu_r = 1000$ para um certo material do qual um fio cilíndrico de raio 1 mm é feito. Se $I = 1 \text{ A}$ e a distribuição de corrente é uniforme, calcule (a) \mathbf{B} ; (b) \mathbf{H} ; (c) \mathbf{M} ; (d) \mathbf{J} e (e) \mathbf{J}_b dentro do fio.
- 9.23 Calcule valores para H_ϕ , B_ϕ e M_ϕ em $\rho = c$ para um cabo coaxial com $a = 2,5 \text{ mm}$ e $b = 6 \text{ mm}$ se pelo mesmo circula uma corrente $I = 12 \text{ A}$ no condutor central, e $\mu = 3 \text{ mH/m}$ para $2,5 \text{ mm} < \rho < 3,5 \text{ mm}$, $\mu = 5 \text{ mH/m}$ para $3,5 \text{ mm} < \rho < 4,5 \text{ mm}$, e $\mu = 10 \text{ mH/m}$ para $4,5 \text{ mm} < \rho < 6 \text{ mm}$. Use $c =$: (a) 3 mm ; (b) 4 mm ; (c) 5 mm .
- 9.24 Uma linha de transmissão coaxial tem $a = 5 \text{ mm}$ e $b = 20 \text{ mm}$. Considere que seu centro esteja no eixo z e que uma corrente contínua I circule na direção \mathbf{a}_z no centro do condutor. O volume entre os condutores contém um material magnético para o qual $\mu_r = 2,5$, assim como ar. Calcule \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{M} em todos os pontos entre os condutores se $H_\phi = \frac{600}{\pi} \text{ A/m}$ em $\rho = 10 \text{ mm}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e o material magnético está posicionado em: (a) $a < \rho < 3a$; (b) $0 < \phi < \pi$.
- 9.25 Por um filamento condutor em $z = 0$ circula uma corrente de 12 A na direção \mathbf{a}_z . Seja $\mu_r = 1$ para $\rho < 1 \text{ cm}$, $\mu_r = 6$ para $1 < \rho < 2 \text{ cm}$, e $\mu_r = 1$ para $\rho > 2 \text{ cm}$. Calcule: (a) \mathbf{H} em todos os pontos; (b) \mathbf{B} em todos os pontos.

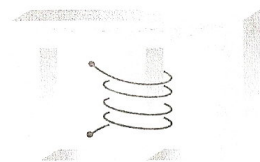


Figura 9.17 Veja o Problema 9.28.

- 9.26 Duas lâminas de corrente, $K_0 \mathbf{a}_x \text{ A/m}$ em $z = 0$ e $-K_0 \mathbf{a}_x \text{ A/m}$ em $z = d$, estão separadas por duas tiras de material magnético, μ_{r1} para $0 < z < a$, e μ_{r2} para $a < z < d$. Se $\mu_{r2} = 3\mu_{r1}$, calcule a razão a/d tal que 10% do fluxo magnético total esteja na região $0 < z < a$.
- 9.27 Seja $\mu_{r1} = 2$ na região 1, definida por $2x + 3y - 4z > 1$, enquanto $\mu_{r2} = 5$ na região 2 onde $2x + 3y - 4z < 1$. Na região 1, $\mathbf{H}_1 = 50 \mathbf{a}_x - 30 \mathbf{a}_y + 20 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$. Calcule: (a) \mathbf{H}_{N1} ; (b) \mathbf{H}_{t1} ; (c) \mathbf{H}_{N2} ; (d) \mathbf{H}_{t2} ; (e) θ_1 , o ângulo entre \mathbf{H}_1 e \mathbf{a}_{N21} ; (f) θ_2 , o ângulo entre \mathbf{H}_2 e \mathbf{a}_{N21} .
- 9.28 Para valores de B abaixo do joelho da curva de magnetização para o aço-silício, aproxime a curva por uma linha reta com $\mu = 5 \text{ mH/m}$. O núcleo mostrado na Figura 9.17 possui áreas de $1,6 \text{ cm}^2$ e comprimentos de 10 cm em cada perna externa, e uma área de $2,5 \text{ cm}^2$ e comprimento de 3 cm na perna central. Uma bobina de 1200 espiras pela qual circulam 12 mA é enrolada na perna central. Calcule B na: (a) perna central; (b) perna central se um gap de ar de $0,3 \text{ mm}$ está presente nessa perna.
- 9.29 No Problema 9.28, a aproximação linear sugerida no enunciado do problema leva a uma densidade de fluxo de $0,666 \text{ T}$ na perna central. Utilizando esse valor de B e a curva de magnetização para o aço-silício, qual corrente é necessária na bobina de 1200 espiras?
- 9.30 Um núcleo toroidal tem uma área da seção reta circular de 4 cm^2 . O raio médio do toróide é de 6 cm . O núcleo é composto de dois segmentos semicirculares: um de aço silício e o outro de um material linear com $\mu_r = 200$. Existe um gap de ar de $0,4 \text{ mm}$ em cada uma das duas junções, e o núcleo é envolvido por uma bobina de 4000 espiras por onde circula uma corrente I_1 . (a) Calcule I_1 se a densidade de fluxo no núcleo é $1,2 \text{ T}$. (b) Calcule a densidade de fluxo no núcleo se $I_1 = -0,3 \text{ A}$.
- 9.31 Um toróide é construído de um material magnético e possui área da seção reta de $2,5 \text{ cm}^2$ e um comprimento efetivo de 8 cm . Existe também um pequeno gap de ar de $0,25 \text{ mm}$ de comprimento e uma área efetiva de $2,8 \text{ cm}^2$. Uma fmm de $200 \text{ A} \cdot \text{m}$ é aplicada ao circuito magnético. Calcule o fluxo total no toróide se o material magnético: (a) é considerado como tendo uma permeabilidade infinita; (b) é considerado como sendo linear com $\mu_r = 1000$; (c) é de aço silício.

satisfeitos com nossas definições de V e \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (54)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (51)$$

As integrais equivalentes de (45) e (46) para os potenciais variáveis no tempo são obtidas das definições (50), (51) e (54), mas vamos apenas apresentar os resultados finais e indicar a natureza geral dos mesmos. No Capítulo 12, descobriremos que qualquer distúrbio eletromagnético viajará à velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

através de qualquer meio homogêneo descrito por μ e ϵ . No caso do espaço livre, essa velocidade é a velocidade da luz, aproximadamente 3×10^8 m/s. É lógico, então, suspeitar que o potencial em qualquer ponto não seja devido ao valor da densidade de carga em algum ponto distante no mesmo instante, mas a seu valor em algum tempo anterior, pois o efeito se propaga em uma velocidade finita. Logo, (45) se torna

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{[\rho_v]}{4\pi\epsilon R} dv \quad (57)$$

onde $[\rho_v]$ indica que todo t que aparece na expressão para ρ_v foi substituído por um tempo retardado,

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

Logo, se a densidade de carga pelo espaço era dada como

$$\rho_v = e^{-t} \cos \omega t$$

então

$$[\rho_v] = e^{-t'} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

onde R é a distância entre o elemento diferencial de carga sendo considerado e o ponto no qual o potencial deve ser determinado.

O potencial vetor magnético retardado é dado por

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu[\mathbf{J}]}{4\pi R} dv \quad (58)$$

O uso de um tempo retardado resultou nos potenciais variáveis no tempo, os quais foram chamados de potenciais retardados. No Capítulo 14 vamos aplicar (58) para a situação simples de um elemento diferencial de corrente no qual I é uma função seno-

dal do tempo. Outras aplicações simples de (58) são consideradas em diversos problemas no final deste capítulo.

Podemos resumir o uso dos potenciais afirmando que um conhecimento da distribuição de ρ_v e \mathbf{J} pelo espaço teoricamente nos permite determinar V e \mathbf{A} a partir de (57) e (58). Os campos elétrico e magnético são então obtidos pela aplicação de (50) e (51). Se as distribuições de carga e corrente são desconhecidas, ou aproximações razoáveis não podem ser utilizadas para elas, esses potenciais usualmente não representam um caminho mais fácil para a solução do que a aplicação direta das equações de Maxwell.

E10.7. Uma carga pontual de $4 \cos 10^8 \pi t$ μC está posicionada em $P_+(0, 0, 1, 5)$, enquanto $-4 \cos 10^8 \pi t$ μC está em $P_-(0, 0, -1, 5)$, ambas no espaço livre. Calcule V em $P(r = 450, \theta, \phi = 0)$ em $t = 15$ ns para $\theta =$: (a) 0° ; (b) 90° ; (c) 45° .

Resp. 159,8 V; 0; 143 V

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bewley, L. V. *Flux Linkages and Electromagnetic Induction*. New York: Macmillan, 1952. Esse pequeno livro discute muito dos exemplos paradoxais envolvendo tensões induzidas.
2. Faraday, M. *Experimental Researches in Electricity*. Londres: B. Quaritch, 1839, 1855. Leitura muito interessante das primeiras descobertas científicas. Uma fonte mais recente e disponível é o *Great Books of the Western World*, vol. 45, Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1952.
3. Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J. *Fundamentals of Physics*. 5ª ed. New York: John Wiley & Sons, 1997. Esse texto é largamente utilizado nos primeiros anos dos cursos universitários de física.
4. Harman, W. W. *Fundamentals of Electronic Motion*. New York: McGraw-Hill, 1953. Efeitos relativísticos são discutidos de uma maneira clara e interessante.
5. Nussbaum, A. *Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965. Veja o exemplo do *rocket-generator* que começa na p. 211.
6. Owen, G. E. *Electromagnetic Theory*. Boston: Allyn and Bacon, 1963. A lei de Faraday é discutida no Capítulo 8.
7. Panofsky, W. K. H., e Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*. 2ª ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962. A relatividade é tratada em um nível moderadamente avançado no Capítulo 15.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 10

- 10.1 Na Figura 10.4, seja $B = 0,2 \cos 120\pi t$ T, e assuma que o condutor que une as duas extremidades do resistor seja perfeito. Assuma que o campo magnético produzido por $I(t)$ é desprezível. Calcule: (a) $V_{ab}(t)$; (b) $I(t)$.
- 10.2 Na Figura 10.1, substitua o voltímetro por uma resistência R . (a) Calcule a corrente I que circula como resultado da movimentação da barra deslizante. (b) A corrente da barra resulta em uma força exercida na barra à medida que se move.

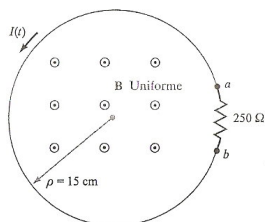


Figura 10.4 Veja o Problema 10.1.

Determine essa força. (c) Determine a potência mecânica necessária para manter uma velocidade constante v e mostre que essa potência é igual à potência absorvida por R .

- 10.3 Dado $\mathbf{H} = 300\mathbf{a}_x \cos(3 \times 10^8 t - y)$ A/m no espaço livre, calcule a fem desenvolvida na direção \mathbf{a}_y genérica ao longo do caminho fechado que possui vértices em: (a) $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 0)$; (b) $(0, 0, 0)$, $(2\pi, 0, 0)$, $(2\pi, 2\pi, 0)$ e $(0, 2\pi, 0)$.

- 10.4 Superfícies condutoras estão posicionadas em $\rho = 1$ cm e $\rho = 2$ cm no espaço livre. O volume $1 \text{ cm} < \rho < 2 \text{ cm}$ contém os campos $H_\phi = \frac{2}{\rho} \cos(6 \times 10^8 \pi t - 2\pi z)$ A/m e $E_\rho = \frac{240\pi}{\rho} \cos(6 \times 10^8 \pi t - 2\pi z)$ V/m. (a) Mostre que esses dois campos satisfazem à Equação (6), Seção 10.1. (b) Calcule as integrais na Equação (4) para uma superfície plana definida por $\phi = 0$, $1 \text{ cm} < \rho < 2 \text{ cm}$, $0 < z < 0,1 \text{ m}$, e seu perímetro, e mostre que os mesmos resultados são obtidos.

- 10.5 A localização da barra deslizante na Figura 10.5 é dada por $x = 5t + 2t^2$, e a separação entre os dois trilhos é de 20 cm. Seja $\mathbf{B} = 0,8x^2\mathbf{a}_z$ T. Encontre a leitura do voltímetro em: (a) $t = 0,4$ s; (b) $x = 0,6$ m.

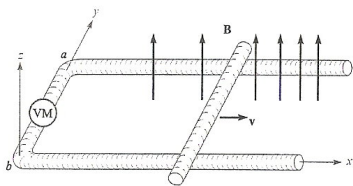


Figura 10.5 Veja o Problema 10.5.

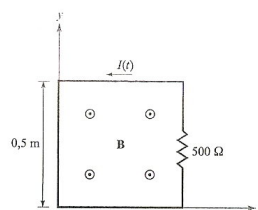


Figura 10.6 Veja o Problema 10.6.

- 10.6 Um filamento perfeitamente condutor que contém um pequeno resistor de 500Ω tem a forma de um quadrado, conforme ilustrado na Figura 10.6. Calcule $I(t)$ se $\mathbf{B} =$: (a) $0,3 \cos(120\pi t - 30^\circ)\mathbf{a}_z$ T; (b) $0,4 \cos[\pi(ct - y)]\mathbf{a}_z$ μT, onde $c = 3 \times 10^8$ m/s.

- 10.7 Cada trilho na Figura 10.7 possui uma resistência de $2,2 \Omega/\text{m}$. A barra se move para a direita a uma velocidade constante de 9 m/s em um campo magnético uniforme de 0,8 T. Calcule $I(t)$, $0 < t < 1$ s, se a barra estiver em $x = 2$ m em $t = 0$ e: (a) um resistor de $0,3 \Omega$ estiver presente na extremidade esquerda, com a extremidade direita aberta; (b) um resistor de $0,3 \Omega$ estiver presente em cada extremidade.

- 10.8 A Figura 10.1 é modificada para mostrar que a separação entre os trilhos é maior quando y é maior. Especificamente, considere que a separação $d = 0,2 + 0,02y$. Dada a velocidade uniforme $v_y = 8$ m/s e uma densidade uniforme de fluxo magnético $B_z = 1,1$ T, calcule V_{12} em função do tempo se a barra estiver posicionada em $y = 0$ em $t = 0$.

- 10.9 Uma espira filamentar quadrada de fio possui 25 cm de lado e tem uma resistência de 125Ω por metro de comprimento. A espira pertence ao plano $z = 0$ com

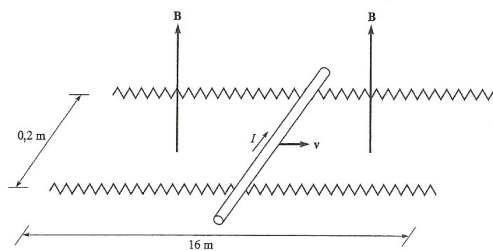


Figura 10.7 Veja o Problema 10.7.

seus vértices em $(0, 0, 0)$, $(0, 25, 0, 0)$, $(0, 25, 0, 25)$ e $(0, 0, 25, 0)$ em $t = 0$. A espira está se movendo com uma velocidade $v_y = 50$ m/s no campo $B_z = 8 \cos(1,5 \times 10^5 t - 0,5x)$ μ T. Encontre uma função do tempo que expresse a perda ôhmica que é entregue à espira.

10.10 (a) Mostre que a razão entre as amplitudes da densidade de corrente de condução e da densidade de corrente de deslocamento é $\sigma/\omega\epsilon$ para o campo aplicado $E = E_m \cos \omega t$. Assuma $\mu = \mu_0$. (b) Qual é a razão entre as amplitudes se o campo aplicado for $E = E_m e^{-\sigma t}$, onde τ é real?

10.11 Sejam as dimensões internas de um capacitor coaxial $a = 1,2$ cm, $b = 4$ cm, e $l = 40$ cm. O material homogêneo dentro do capacitor possui os parâmetros $\epsilon = 10^{-11}$ F/m, $\mu = 10^{-5}$ H/m e $\sigma = 10^{-5}$ S/m. Se a intensidade de campo elétrico é $\mathbf{E} = (10^9/\rho) \cos 10^3 t \mathbf{a}_\rho$ V/m, calcule: (a) \mathbf{J} ; (b) a corrente de condução total I_c pelo capacitor; (c) a corrente de deslocamento total I_d pelo capacitor; (d) a razão entre as amplitudes de I_d e de I_c , o fator de qualidade do capacitor.

10.12 Mostre que a corrente de deslocamento que circula entre os dois cilindros condutores em um capacitor coaxial sem perdas é exatamente a mesma que a corrente de condução que flui no circuito externo, caso a tensão aplicada entre os condutores seja $V_0 \cos \omega t$ volts.

10.13 Considere a região definida por $|x|, |y|$ e $|z| < 1$. Seja $\epsilon_r = 5$, $\mu_r = 4$ e $\sigma = 0$. Se $\mathbf{J}_d = 20 \cos(1,5 \times 10^5 t - bx) \mathbf{a}_x$ μ A/m²: (a) Calcule \mathbf{D} e \mathbf{E} ; (b) use a forma pontual da lei de Faraday e uma integração com relação ao tempo para encontrar \mathbf{B} e \mathbf{H} ; (c) use $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}$ para encontrar \mathbf{J}_d ; (d) Qual é o valor numérico de b ?

10.14 Uma fonte de tensão $V_0 \sin \omega t$ é conectada entre duas esferas condutoras concêntricas, $r = a$ e $r = b$, $b > a$, onde a região entre elas é um material para o qual $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0$. Calcule a corrente de deslocamento total pelo dielétrico e compare-a com a corrente da fonte determinada pela capacitância (Seção 6.4) e de métodos de análise de circuitos.

10.15 Seja $\mu = 3 \times 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 1,2 \times 10^{-10}$ F/m e $\sigma = 0$ em todos os pontos. Se $\mathbf{H} = 2 \cos(10^{10} t - \beta x) \mathbf{a}_x$ A/m, use as equações de Maxwell para obter expressões para \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{E} e β .

10.16 Derive a equação da continuidade a partir das equações de Maxwell.

10.17 A intensidade de campo elétrico na região $0 < x < 5$, $0 < y < \pi/12$, $0 < z < 0,06$ m no espaço livre é dada por $\mathbf{E} = C \sin 12y \sin az \cos 2 \times 10^{10} t \mathbf{a}_x$ V/m. Começando pela relação $\nabla \times \mathbf{E}$, use as equações de Maxwell para encontrar um valor numérico para a , sabendo-se que a é maior que zero.

10.18 A linha de transmissão de placas paralelas mostrada na Figura 10.8 possui dimensões $b = 4$ cm e $d = 8$ mm, enquanto o meio entre as placas é caracterizado por $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 20$ e $\sigma = 0$. Despreze os campos fora do dielétrico. Dado o campo $\mathbf{H} = 5 \cos(10^9 t - \beta z) \mathbf{a}_y$ A/m, use as equações de Maxwell para auxiliar a encontrar: (a) β ,

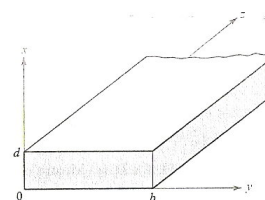


Figura 10.8 Veja o Problema 10.8.

se $\beta > 0$; (b) a densidade de corrente de deslocamento em $z = 0$; (c) a corrente de deslocamento total que atravessa a superfície $x = 0,5d$, $0 < y < b$, $0 < z < 0,1$ m na direção \mathbf{a}_x .

10.19 Na Seção 10.1, a lei de Faraday foi utilizada para mostrar que o campo $\mathbf{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \mathbf{a}_\phi$ resulta do campo magnético variável $\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z$. (a) Mostre que esses campos não satisfazem à outra equação de Maxwell para o rotacional. (b) Se fizermos $B_0 = 1$ T e $k = 10^6$ s⁻¹, estaremos estabelecendo uma densidade de fluxo magnético consideravelmente alta em 1 μ s. Use a equação $\nabla \times \mathbf{H}$ para mostrar que a taxa na qual B_z deveria variar (mas não varia) com ρ é apenas aproximadamente 5×10^{-6} T por metro no espaço livre em $t = 0$.

10.20 O ponto $C(-0,1, -0,2, 0,3)$ pertence à superfície de um condutor perfeito. A intensidade de campo elétrico em C é $(500\mathbf{a}_x - 300\mathbf{a}_y + 600\mathbf{a}_z) \cos 10^7 t$ V/m, e o meio em volta do condutor é caracterizado por $\mu_r = 5$, $\epsilon_r = 10$ e $\sigma = 0$. (a) Encontre um vetor unitário normal à superfície do condutor em C , se a origem está dentro do condutor. (b) Encontre a densidade superficial de carga em C .

10.21 (a) Mostre que, sob condições de campo estático, a Equação (55) se reduz à lei circuital de Ampère. (b) Verifique que a Equação (51) se torna a lei de Faraday quando tomamos seu rotacional.

10.22 Em um meio desprovido de fontes no qual $\mathbf{J} = 0$ e $\rho_v = 0$, considere um sistema de coordenadas cartesianas no qual \mathbf{E} e \mathbf{H} são funções apenas de z e t . O meio tem permissividade ϵ e permeabilidade μ . (a) Se $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ e $\mathbf{H} = H_y \mathbf{a}_y$, comece pelas equações de Maxwell e determine a equação diferencial parcial de segunda ordem que E_x deve satisfazer. (b) Mostre que $E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$ é uma solução daquela equação para um valor particular de β . (c) Calcule β como função dos parâmetros dados.

10.23 Na região 1, $z < 0$, $\epsilon_1 = 2 \times 10^{-11}$ F/m, $\mu_1 = 2 \times 10^{-6}$ H/m e $\sigma_1 = 4 \times 10^{-3}$ S/m. Na região 2, $z > 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, $\mu_2 = 2\mu_1$ e $\sigma_2 = \sigma_1/4$. É sabido que $\mathbf{E}_1 = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z) \cos 10^9 t$ V/m em $P(0, 0, 0^-)$. (a) Encontre \mathbf{E}_{N1} , \mathbf{E}_{t1} , \mathbf{D}_{N1} e \mathbf{D}_{t1} em P_1 . (b) Calcule \mathbf{J}_{N1} em \mathbf{J}_{t1} em P_1 . (c) Calcule \mathbf{E}_{N2} , \mathbf{D}_{N2} e \mathbf{J}_{N2} em $P_2(0, 0, 0^+)$. (d) (Mais difícil) Use

- a equação da continuidade para ajudar a mostrar que $J_{N1} - J_{N2} = \partial D_{N2}/\partial t - \partial D_{N1}/\partial t$, e então determine \mathbf{D}_{N2} , \mathbf{J}_{N2} e \mathbf{E}_{N2} .
- 10.24 Em um meio no qual $\rho_v = 0$, mas a permissividade é uma função da posição, determine as condições para a variação da permissividade de forma que (a) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$; (b) $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$.
- 10.25 Em uma região onde $\mu_r = \epsilon_r = 1$ e $\sigma = 0$, os potenciais retardados são dados por $V = x(z - ct)$ V e $\mathbf{A} = x\left(\frac{z}{c} - t\right)\mathbf{a}_z$ Wb/m, onde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. (a) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}$. (b) Calcule \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{E} e \mathbf{D} . (c) Mostre que esses resultados satisfazem às equações de Maxwell se \mathbf{J} e ρ_v são zero.
- 10.26 Seja a corrente $I = 80t$ A na direção \mathbf{a}_z ao longo do eixo z no espaço livre dentro do intervalo $-0,1 < z < 0,1$ m. (a) Calcule A_z em $P(0, 2, 0)$ e (b) desenhe A versus t para o intervalo de tempo $-0,1 < t < 0,1$ μ s.

Linhas de Transmissão

As linhas de transmissão são utilizadas para transmitir energia e sinais elétricos de um ponto para outro, especificamente de uma fonte para uma carga. Exemplos incluem a conexão entre um transmissor e uma antena, conexões entre computadores em uma rede ou conexões entre uma usina hidrelétrica e uma subestação a várias centenas de quilômetros de distância. Outros exemplos familiares incluem a interconexão entre componentes em um sistema estéreo e a conexão entre um provedor de serviços a cabo e seu televisor. Exemplos que são menos familiares incluem as conexões entre dispositivos em uma placa de circuito, os quais foram projetados para operar em alta frequência.

O que todos esses exemplos têm em comum é que os elementos a ser interconectados estão separados por distâncias da ordem de um comprimento de onda ou até muito mais, enquanto nos métodos de análise de circuitos básicos as conexões entre elementos são consideradas como tendo comprimento desprezível. Essa última condição nos permitiu, por exemplo, tomar como verdadeiro que a tensão sobre um resistor de um lado do circuito estava exatamente em fase com a fonte de tensão do outro lado ou, mais genericamente, que o tempo medido na fonte é precisamente o mesmo tempo medido em todos os outros pontos no circuito. Quando as distâncias são suficientemente grandes entre a fonte e o receptor, o efeito de atraso no tempo se torna apreciável, o que leva a diferenças de fase induzidas por esse atraso. Resumindo, lidamos com o fenômeno de ondas em linhas de transmissão, da mesma maneira que encontraremos para o caso da propagação da energia de ponto a ponto no espaço livre ou nos dielétricos.

Os elementos básicos em um circuito, tais como resistores, capacitores, indutores e as conexões entre eles, são considerados elementos *concentrados*, se o atraso de tempo na propagação pelos elementos for desprezível. Por outro lado, se os elementos ou interconexões são grandes o suficiente, pode ser necessário considerá-los como elementos *distribuídos*. Isso significa que suas características resistivas, capacitivas e indutivas devem ser avaliadas em uma base de valor por unidade de distância. As linhas de transmissão, de uma maneira geral possuem essa propriedade, e assim se transformam em elementos de circuitos distribuídos ao longo de sua extensão, os quais possuem impedâncias que contribuirão para o problema. A regra básica é que devemos considerar os elementos como distribuídos, se o atraso de tempo ao longo das dimensões do elemento for da ordem do intervalo de tempo de interesse mais curto. No caso de harmônicos